5 年考えて解けなかった問題

pt

2004 年 8 月 13 日

解答

補助線とか円周角とかってパターンが出ているので無しのコンセプトで
まず二等辺三角形の条件より

$$\angle ACB = \angle ABC = \frac{180^\circ - 20^\circ}{2} = 80^\circ$$

ここから

$$\angle ECD = 80^\circ - 60^\circ = 20^\circ \tag{1}$$
$$\angle ABE = 80^\circ - 50^\circ = 30^\circ \tag{2}$$
$$\angle CEB = 180^\circ - 50^\circ - 80^\circ = 50^\circ \tag{3}$$

(1), (3) より $\triangle DAC, \triangle CBE$ は二等辺三角形で

$$AD = CD \tag{4}$$
$$CE = BC \tag{5}$$

つぎに $\triangle ABE$ と $\triangle CDE$ が相似であることを示す
$\angle EAB = \angle ECD = 20^\circ$ は既出なので, これらの角を成すそれぞれの二辺の比が等しいことを示せばよい
具体的には

$$
\begin{aligned}
&AB : CD = AE : CE \\
&\Leftrightarrow (AD + DB) : CD = (AD + DB - BC) : CE \\
&\Leftrightarrow (CD + DB) : CD = (CD + DB - BC) : BC \\
&\Leftrightarrow (AD + DB)(BC) = (AD + DB - BC)(CD) \\
&\Leftrightarrow (CD)^2 - 2(BC)(CD) + (CD)(DB) - (BC)(DB) = 0 \qquad (6)
\end{aligned}
$$

を示すことになる

ここで $\triangle DBC$ に着目すると, 正弦定理より

$$\frac{BC}{sin40^\circ} = \frac{CD}{sin80^\circ} = \frac{DB}{sin60^\circ} = const\ \ k(\neq 0)$$

代入して積和, 和積使って変形していくと

$$
\begin{aligned}
&((6)\text{ の左辺})/k^2 \\
&= sin80^\circ(sin80^\circ - sin40^\circ) - sin80^\circ sin40^\circ + sin60^\circ(sin80^\circ - sin40^\circ) \\
&= 3sin80^\circ cos60^\circ sin20^\circ - sin80^\circ sin60^\circ cos20^\circ + 2sin60^\circ cos60^\circ sin20^\circ \\
&= sin80^\circ(\frac{3}{2}sin20^\circ - \frac{\sqrt{3}}{2}cos20^\circ) + sin120^\circ sin20^\circ \\
&= \sqrt{3}sin80^\circ(sin60^\circ sin20^\circ - cos60^\circ cos20^\circ) + sin120^\circ sin20^\circ \\
&= \sqrt{3}sin80^\circ(-cos80^\circ) + sin120^\circ sin20^\circ \\
&= -sin120^\circ sin160^\circ + sin120^\circ sin20^\circ \\
&= -sin120^\circ sin20^\circ + sin120^\circ sin20^\circ \\
&= 0
\end{aligned}
$$

以上より相似が示された

この 2 つの三角形の角の対応をみれば解は (3) より 30°