２． 数と式の問題

【１】［ 整式の基本問題 ］

＜省略＞

例２． x，yついての整式 $x^3+6x^2y+5xy-4y^2-5x+6y-3$ について、
次の問いに答えよ。
⑴ xについて何次式か。また、yについて何次式か。
⑵ x，yについて何次式か。 ⑶ yについて昇べきの順に整理せよ。

＜省略＞

例７． $A=3x^2-2xy+y^2$， $B=5x^2+3xy-4y^2$ の時、
次の等式 $3A-2X=2B-3X$ を満たす整式Xを求めよ。

＜省略＞

【２】［ 展　開 ］

§１．展開の基本問題

＜省略＞

[類題10]⑤ $(x+y+z)(x-y+z)(x+y-z)(x-y-z)$ を展開せよ。

＜省略＞

[類題12]④ $[a,b,c]+[a,c,b]+[b,a,c]+[b,c,a]+[c,a,b]+[c,b,a]$
を展開せよ。但し、$[a,b,c]=\dfrac{1}{a(a+b)(a+b+c)}$ とする。

＜省略＞

例１６． $(2x^2-x-3)^6$ について、x^4 の係数を求めよ。

＜省略＞

【３】［ 因 数 分 解 ］

＜省略＞

例１３． 次の式を因数分解せよ。

⑴ $x(y-z)^3+y(z-x)^3+z(x-y)^3$

⑵ $x(y^3-z^3)+y(z^3-x^3)+z(x^3-y^3)$

＜省略＞

例１５． 次の式を因数分解せよ。

⑴ $(x+y+z)^3-(y+z-x)^3-(z+x-y)^3-(x+y-z)^3$ （法政大）

⑵ $(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)$
$+(a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$
$+(a+b+c)(a+b-c)(-a+b+c)$
$-(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)$ （京都工繊大）

＜省略＞

《実力問題》

＜省略＞

⑮ $(a-x)^3+(b-x)^3-(a+b-2x)^3$

＜省略＞

【４】［ 整 式 除 法 ］

＜省略＞

例２１． 次の問いに答えよ。

⑴ $(x+1)^2$ で割ると余りが $3x-2$, x^2-x-6 で割ると余りが $-2x-3$ となる整式 $f(x)$ を $(x+1)^2(x^2-x-6)$ で割った余りを求めよ。

⑵ 整式 $f(x)$, $g(x)$ が ⑴ の条件を満たす時、$f(x)$ は $g(x)$ と $(x+1)^2(x^2-x-6)$ の倍数の和になることを示せ。

＜省略＞

例３２．　x^{100} を x^2-x+1 で割算する。商の中で x^{92}，x^{82}，x^{36} の係数を求めよ。
また、余りも求めよ。

＜省略＞

例４１．　次の 3 条件を満たす自然数 n を全て求め、その中の最大なものを求めよ。
⑶ n は 45 で割り切れる。　⒝ n は 2 以下、7 以上の素数で割り切れない。

⒞ n の約数は $\dfrac{n}{45}$ 個以上ある。

＜省略＞

例５１．　整数 a , b , c を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。
$f(\alpha)=0$, $f(\beta)=0$ となるような有理数 α , β が存在する時、次のことを証明せよ。
⑴ α , β は整数である。
⑵ 任意の整数 ℓ と、任意の自然数 n に対して、n 個の整数 $f(\ell)$, $f(\ell+1)$, …,
…, $f(\ell+n-1)$ のうち少なくとも 1 つは n で割り切れる。

＜省略＞

例６５．　条件 $a>b$ を満たす正の整数 a , b から数列 $\{\alpha_n\}$ を、$\alpha_1=a$, $\alpha_2=b$

$n\geqq 3$ に対して、$\alpha_n=\begin{cases}\alpha_{n-2} \text{ を } \alpha_{n-1} \text{ で割った余り} & (\alpha_{n-1}>0 \text{ の時}) \\ 0 & (\alpha_{n-1}=0 \text{ の時})\end{cases}$

によって定める。また、数列 $\{A_n\}$ を $A_1=1, A_2=2$, $A_n=A_{n-1}+A_{n-2}$
($n\geqq 3$ の時) によって定める。この時、⑴〜⑷を証明せよ。
⑴ $\alpha_{N-1}>1$, ${}_N=1$ となる整数 N が存在する。　以下、Nはこの整数を表す。
⑵ $\alpha_{N+1-k}\geqq A_k$ ($k=1, 2, \cdots, N$)
⑶ $A_{n+1}\geqq\left(\dfrac{8}{5}\right)^n$ ($n=1, 2, \cdots$)　　⑷ $N\leqq 1+\log_{(8/5)} a$

＜省略＞

例７８．　自然数 n の関数 f (n) を、f (n) = n を k (整数) で割った余りと定め、
また、関数 $g(n)=f(1^n+2^n+3^n+\cdots+k^n)$ と定める。ℓ は素数。
⑴ 全ての自然数 n に対して、$f(n^k)=f(n)$ を示せ。
⑵ g (n) が、$0\leqq n\leqq k-2$ の時、g (n) は k で割り切れることを示せ。
⑶ $n=k-1$ の時、g (n) を k で割った余りを求めよ。必要なら、

公式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^n=\frac{1}{n+1}k(k+1)\cdots(k+n-1)(k+n)$

$\displaystyle -A_{n-1}\sum_{i=1}^{k} i^{n-1}-A_{n-2}\sum_{i=1}^{k} i^{n-2}-\cdots-A_0\sum_{i=1}^{k} i^0$ を用いよ。

但し、$A_0, A_1, \cdots, A_{n-1}$ は整数係数のある多項式。

＜省略＞

参３．自然数ｍに対して、111^m を 1997 で割った余りを $r(m)$ で表す。ここで、$r(1), r(2), \cdots, r(1996)$ は全て異なるとし、1997 は素数である。

⑴ $r(1996), r(998)$ をそれぞれ求めよ。

⑵ ｋを自然数の定数とする。$13^n + 197^k \cdot 7^n$ が 1997 の倍数になるような自然数ｋが存在するためにｎが満たすべき必要十分条件を求めよ。但し、次の（Ａ），（Ｂ）を用いよ。

（Ａ） $r(1291) = 13$, $r(1658) = 7$, $r(1790) = 197$ が成り立つとする。

（Ｂ） ａ，ｂが互いに素な自然数で、$b \geqq 2$ の時、ａｘをｂで割った余りが１となるような自然数ｘが存在する。

【５】［互いに素・素数］

＜省略＞

例７．ｘ，ｙが互いに素で自然数の時である。ａ，ｂ，ｃ，ｄが整数の時、

$|ad - bc| = 1$ ならば、分数 $\dfrac{ax+by}{cx+dy}$ は既約であることを証明せよ。

＜省略＞

例１８．素数ｐ及び自然数ｎに対し、$N = 1 + p + p^2 + \cdots + p^n$ と置く、この時、

⑴ $N < p^{n+1}$ を示せ。

⑵ ｎ以下の自然数ｋに対し、集合 $\{1, 2, \cdots, N\}$ に属する数の中、p^k の倍数であるものの個数 m^k を求めよ。

⑶ p^m が $N!$ の約数であるような最大の整数ｍを求めよ。（97 奈良県医大）

＜省略＞

例２０、$A = \{a + b\sqrt{3}\,i \mid a, b \text{は整数}\}$ という集合の要素 α について、２つの要素 β, γ があって、$\alpha = \beta\gamma$ $(\beta, \gamma \neq 1, -1)$ の時、α は合成数、そうでない時、α をＡでの素数という。５はＡでの素数であることを証明せよ。但し、ｉは虚数単位とする。

＜省略＞

参３．２つの素数は、それらの差が２である時、双子素数と呼ばれる。５より大きい整数で、双子素数の間に挟まれる整数は６の倍数であることを証明せよ。

＜省略＞

【６】［ 約 数・倍 数 ］

＜省略＞

例２１． 10 進法で 5 桁の数ａｂｃｄｅ（ここで、ａｂｃｄｅは、5 つの数ａ，ｂ，ｃ，ｄ，ｅ の積ではなく、10 進法としての表記である）は、ａ－ｂ＋ｃ－ｄ＋ｅが 11 の倍数の時、11 の倍数であることを示せ。

＜省略＞

例３３． ⑴ ｎが 1 以上の整数とする時、3^n-1，3^n+1 のいずれかは、4 の倍数であることを示せ。

⑵ $3^{4^n}-1$（但し、$n \geqq 1$）は、4 で何回割り切れるか。

＜省略＞

例３５． $f(x)=x^2+4x+3$ と置く。

⑴ ｎは 3 以上の自然数で、ある自然数ａに対して、$f(a)$は 2^n の倍数になっているとする。この時、$f(a)$と $f(a+2^{n-1})$ のうち少なくとも一方は 2^{n+1} の倍数であることを示せ。

⑵ 任意の自然数ｎに対して、$f(a_n)$が 2^n の倍数となるような自然数 a_n が存在することを示せ。

＜省略＞

例４４． 0 以上の整数ｘに対して、$D(x)$でｘの下 3 桁を表すことにする。例えば、$D(12345)=345$，$D(1)=1$ である。ｎを 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。

⑴ ｘ，ｙが 0 以上の整数の時、$D(nx)=D(ny)$ ならば、$D(x)=D(y)$ であることを示せ。

⑵ $D(nx)=999$ となる 0 以上の整数ｘが存在することを示せ。

＜省略＞

参１． ｐを素数とし、$M=197\times 199$ とする。尚、197, 199 は素数である。

⑴ $(p-1)!$ をｐで割った余りをｒとする時、$\dfrac{(199p)!}{199!\,p^{199}}$ をｐで割った余りは $\boxed{\quad}$ をｐで割った余りに等しいから、適当な整数ｋを用いて $(199p)!=199!\cdot p^{199}(kp+\boxed{\quad})$ と書ける。ｒを用いて空欄を埋めよ。

⑵ ${}_{199p}C_{197p}-{}_{199}C_{197}$ はｐの倍数であることを示せ。

⑶ $M=197\times 199$ とする。${}_{197M}C_M$ をＭで割った余りを求めよ。尚、197, 199 は素数である。

【７】　［無 理 数］

＜省略＞

例９．　ｎを自然数、$\sqrt{n}$ を無理数とする時、$\sqrt{n}$ の整数部分をｍと置く。この時 $\dfrac{m^2-(\sqrt{n}-m)^2}{\sqrt{n}-m}$ が有理数ならば、ｎは２か８であることを示せ。

＜省略＞

例１６．　正の実数ａの平方根 $\sqrt{a}$ を近似することを考える。与えられた２以上の整数ｐに対して関数ｆ（ｘ），ｇ（ｘ）を $f(x)=x^p-ax^{p-2}$，
$g(x)=x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}$ とする。ここで、$f'(x)$ はｆ（ｘ）の導関数である。
次の問いに答えよ。

⑴　$g(x)-\sqrt{a}$ は、$g(x)-\sqrt{a}=(x-\sqrt{a})^2\cdot\dfrac{x\text{の1次式}}{x\text{の2次式}}$ の形で表されることを示せ。

⑵　$p=1$ とする。この時、$g(x)-\sqrt{a}$ は、
$g(x)-\sqrt{a}=(x-\sqrt{a})^2\cdot\dfrac{\text{定数項}}{x\text{の2次式}}$ の形で表されることを示せ。

⑶　$a=10$，$p=1$ とする。$3.1<\sqrt{10}<3.2$ に注意して、不等式
$0<\sqrt{10}-g(3)<\dfrac{1}{100}$ が成り立つことを示せ。
また、$\sqrt{10}$ を小数第２位まで求めよ(即ち、小数第３位以下を切り捨てよ)。

＜省略＞

参３．　自然対数の底ｅは、$e=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}=\lim_{n\to\infty}e_n$　但し、$e_n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$ と表されることを用いて、次を示せ。

⑴　$0<e-e_n<\dfrac{2}{(n+1)!}$　$(n=1,2,\cdots)$

⑵　$0<n!\cdot e-n!\cdot e_n<1$　$(n=1,2,\cdots)$

⑶　ｅは無理数である。　(90 金沢大・類)

＜省略＞

【８】［ 位 の 数 ］

＜省略＞

例１６．$N=23456^5$ は 22 桁の数で、N＝□100186□□66715963637□□ なる数である。
□～□ に 0 から 9 の数字を入れよ。

＜省略＞

例２０．6 桁の正整数で、654321 より大きく、かつ、以下の条件を満たすものは、それぞれ幾つあるか答えよ。

⑴ その正整数を表す 6 つの数字の中に 同じ数字が丁度 5 回現れるもの。
例えば、313333，555552 のような数。

⑵ その正整数を表す 6 つの数字が全て異なるもの。例えば、187046，350492 のような数。

＜省略＞

例２３．nを正の整数とし、$f(n)$をnの一位の数とする。

⑴ $f(n)\{f(n^2)-f(n)\}=18$ を満たす $f(n)$を求めよ。

⑵ 任意の正の整数nに対して、$f(n^2-n)$ は偶数であることを証明せよ。

⑶ 任意の正の整数n, kに対して、$f(n^{k+8})=f(n^k)$ であることを証明せよ。

＜省略＞

例３２．自然数qを $q=a_m\cdot 3^m+a_{m-1}\cdot 3^{m-1}+\cdots+a_1\cdot 3+a_0$（$m$は 0 以上の整数、$a_i$は 0，1，2 ）という形で表した時、$a_i$のうちで 2 であるものの個数を$\ell(q)$と書くことにする。例えば、$34=1\cdot 3^3+0\cdot 3^2+2\cdot 3+1$ であるから、$\ell(34)=1$ で、また、$27=3^3$ であるから、$\ell(27)=0$ である。
以下の問いに答えよ。但し、nは自然数とする。

⑴ $\ell(80)$，$\ell(3^n-1)$ をそれぞれ求めよ。

⑵ 0 以上の整数rに対して、$\ell(3^r q)=\ell(q)$ が成り立つことを示せ。

⑶ $q=2\cdot 3^m+2\cdot 3^n$（$m>n\geqq 0$）の時、$\ell(q^3)$ の値を求めよ。

⑷ $N=3^n$ とし、$b_n=\displaystyle\sum_{q=1}^{N}\ell(q)$ と置く。b_nをnの式で表せ。

＜省略＞

参１．$\dfrac{10^{210}}{10^{10}+3}$ の整数部分の桁数と、1 の位の数字を求めよ。
但し、$3^{21}=10460353203$を用いて良い。（91 東工大・前）

＜省略＞

【９】 ［ 分 数 式 ］

＜省略＞

例３． 整数ｎは正の整数ｋ，ℓを用いて、$n = k + \dfrac{6}{k} + \ell + \dfrac{6}{\ell}$ と表されている
とする。このようなｎを全て求めよ。

＜省略＞

例１６． ｋ，ℓ，ｍ，ｎは負でない整数とすると、０でない全てのｘに対して、
$\dfrac{(2x+1)^k}{x^{\ell}} - 2 = \dfrac{(2x+1)^m}{x^n}$ を成り立たさせるｋ，ℓ，ｍ，ｎの組を求めよ。

＜省略＞

参２． $\dfrac{n^3+1}{mn-1}$ が整数になるような正整数（ｍ，ｎ）の組を全て決定せよ。

＜省略＞

【１０】［最大公約数と最小公倍数］

＜省略＞

例２８． 正の整数ｎに対して、$a_n = 100 + n^2$ と定める。各ｎに対して、a_n と a_{n+1}
との最大公約数を d_n と置く。ｎが全ての正の整数を渡る（動く）時、
d_n の最大値を求めよ。

＜省略＞

参 ２． $a_n = n^3 - 5n^2 + 6n$，$b_n = n^2 + 5$（$n = 1, 2, 3, \cdots$）とし、a_n と b_n の
最大公約数を d_n とする。但し、$a_n = 0$ の時は $d_n = b_n$ とする。また、
$d_1, d_2, d_3, \cdots$ の最大値をｄとする。$d_n = d$ を満たす最小の正の整数
ｎを求めよ。 (98 数学オリ・予選)

＜省略＞

【11】　［ 整　数　解 ］

§ １．２変数１次式の整数解

＜省略＞

例７．　方程式 $113x+34y=3$ の整数解を全て求めよ。

＜省略＞

例１１．　x，yを自然数として、$a=3x+2y$，$b=4x+3y$ と置く時、次の問いを証明せよ。

⑴ a，bの最大公約数と、x，yの最大公約数とは相等しい。

⑵ $\frac{2}{3}<r<\frac{3}{4}$ を満たすどんな有理数rもx，yを適当に選べば、$r=\frac{a}{b}$ と表される。

＜省略＞

§ ２．２変数２次式の整数解

＜省略＞

例３６．　２次方程式 $x^2+ax+b=0$ …① が連続した２つの奇数の整数解を解に持ち、２次方程式 $9x^2+bx+3a=0$ …② が少なくとも１つは、正の整数を解に持つ時、aとbの値を求めよ。

＜省略＞

例４４．　次の問いに答えよ。

⑴ 座標平面上の次の直線ℓ_1，ℓ_2，ℓ_3が少なくとも１点を共有するような整数の組$(a，b)$を全て求めよ。

ℓ_1；$x+y=1$　　ℓ_2；$ax+by=2$　　ℓ_3；$a^2x+b^2y=1$

⑵ 空間内の次の平面π_1，π_2，π_3が少なくとも２点を共有するような整数の組$(a，b，c)$を全て求めよ。　　π_1；$x+y+z=1$

π_2；$ax+by+cz=2$　　π_3；$a^2x+b^2y+c^2z=6$

＜省略＞

§３．３次式の整数解

＜省略＞

例４７． 3次方程式$x^3-(a+2)x^2+(3a+2)x-2a-4=0$の3つの解が全て整数となるように定数$a$を求めよ。

＜省略＞

例５７． $f(x)=x^3-3x$ とする。

⑴ $f(x)$の区間$[-2,2]$における最大値、最小値、及び それらを与えるxの値を求めよ。

⑵ x^3の係数が1である3次関数$g(x)$が区間$[-2,2]$で、$|g(x)|\leqq 2$を満たす時、$g(x)-f(x)$は恒等的に0であることを証明せよ。

＜省略＞

参２． $f(x)=4x^3-6nx^2+(3n^2-1)x$（$n$は整数の定数）とする。全ての整数$x$に対して、$f(x)$が$a$で割り切れるような最大の自然数$a$を求めよ。
（必要ならば、nの値によって分類して答えよ）

＜省略＞

§４．３変数１次式の整数解

＜省略＞

例６４． $abc=ab+bc+ca$ を満たす自然数a,b,cの組(a,b,c)を全て求めよ。

(96 法政大・類)

＜省略＞

参４． nは0以上の整数とする。

⑴ $a_1+2a_2=n$ を満たす0以上の整数a_1,a_2の組(a_1,a_2)の個数$X(n)$を求めよ。

⑵ $a_1+2a_2+3a_3=n$ を満たす0以上の整数a_1,a_2,a_3の組(a_1,a_2,a_3)の個数$Y(n)$で表す時、次の等式

$$Y(3n)+Y(3n+1)+Y(3n+2)=\sum_{\ell=0}^{3n+2}X(\ell)$$

が成り立つことを示し、この式の右辺の値を計算せよ。 (S60 阪大)

＜省略＞

§ ５． 多変数の整数解

＜省略＞

例８１． ｎを正の整数とし、6個の実数 $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ が次の条件①,②を満たしているとする。

① $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5+a_6=2n$

② a_1～a_6の中の任意の3数a_i, a_j, a_k $(i \neq j \neq k)$について、

$a_i+a_j+a_k \leqq n$ ならば、$a_i+a_j+a_k$ は奇数である。

この時、次の⑴⑵を証明せよ。

⑴ a_1～a_6の中の任意の3数a_i, a_j, a_kの和$a_i+a_j+a_k$ は全て奇数である。

⑵ a_1～a_6は全て奇数である。

⑶ $n=19$ の場合に、$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5<a_6$ となる $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6$ を全て求めよ。

＜省略＞

例８４． 42をいくつかの正の整数の和として、$42=a_1+a_2+\cdots+a_k$ のように表した時、積$P=a_1 \cdot a_2 \cdot \cdots \cdot a_k$ が最大となるようにしたい。

⑴ 正の整数Nに対して、2つの正の整数m, nを適当に取って、$N=m+n$ と表した時、$mn \geqq N$ とすることが出来るようなNの範囲を求めよ。

⑵ Pの最大値はいくらか。

例８５． 正の有理数xを既約分数で表した時、その分母の3乗を$f(x)$とする(自然数nに対しては$f(n)=1$とする)。 相異なる正の有理数x, yに対して、次の不等式が成り立つことを示せ。 $\dfrac{3}{f(x)-f(y)} < \dfrac{|x-y|}{\sqrt[3]{f(x)}-\sqrt[3]{f(y)}}$

{但し、$f(x) \neq f(y)$}

＜省略＞

参 ７． 不定方程式$x_1+x_2+\cdots+x_{100}=n$ …① の $0 \leqq x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_{100} \leqq 100$ を満たす整数解の個数と、不定方程式$y_1+y_2+\cdots+y_{50}=n$ …② の $0 \leqq y_1 \leqq y_2 \leqq \cdots \leqq y_{50} \leqq 50$ を満たす整数解の個数が同じであることを示せ。

＜省略＞

§６． 高次式の整数解

＜省略＞

例９０． ｘ，ｙの方程式 $x^2=10^y+2025$ …① を考える。ここに、ｘ，ｙは共に自然数とする。

⑴ ｘを 10 で割った余りを求めよ。　⑵ ①の解(ｘ，ｙ)を求めよ。

＜省略＞

例９４． 正の数ａに対し、ａの小数第１位を四捨五入して得られる整数をｆ（ａ）で表す。

実数ｘ，ｙが $3x-2y=12$, $x>0$, $y>0$ を満たす時、次の問いに答えよ。

⑴ $3f(x)-2f(y)$ の取り得る値を全て求めよ。

⑵ $2f(x)-3f(y)=2$ が成り立つ時、ｘの取り得る値の範囲を求めよ。

＜省略＞

例１０３． 整数を係数とするｎ次の整式

$f(x)=x^{2n}+a_1x^{2n-2}+\cdots+a_{n-1}x^2+a_n$ について、ある自然数

$k\ (>1)$ に対して、ｋが奇数の時、$\dfrac{k+1}{2}$ 個，$f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f\left(\dfrac{k+1}{2}\right)$；

ｋが偶数の時、$\dfrac{k}{2}$ 個，$f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f\left(\dfrac{k}{2}\right)$ で割り切れなければ、

方程式 $f(x)=0$ は有理数の解を持たない。但し、$n>1$

＜省略＞

参１０． 次の式を満たす正整数ｎの存在が知られている。

$133^5+110^5+84^5+27^5=n^5$　このｎの値を決定せよ。　(91 数学オリンピック予選)

＜省略＞

参１２． $a\geqq1$, $b\geqq1$ である整数の組(ａ，ｂ)で次の等式を満たすようなものを 全て求めよ。

$a^{b^2}=b^a$

【12】［ 平　方　数 ］

＜省略＞

例８． $2^{34}+2^{300}+2^{2n}$ が平方数(整数の２乗)となるような最大の整数ｎを求めよ。

＜省略＞

参４．　Ａを16桁の正の整数とする。Ａから連続する何桁かの数字をうまく取り出すと、それらの数字の積を平方数に出来ることを証明せよ。例えば、Ａのある桁が４ならば、この桁だけを取り出せば良い。　(91日本数学オリン)

＜省略＞

【１３】　多　項　式

＜省略＞

例８．　整式ｆ(ｘ)について、次の恒等式が成り立つとする。

$f(x^2)=x^5f(x+1)+x^6+5x^4-6x^2$

⑴　$f(0), f(1), f(2)$の値を求めよ。　⑵　ｆ(ｘ)の次数を求めよ。

⑶　ｆ(ｘ)を決定せよ。

＜省略＞

例１２．　関数ｆ(ｘ)は全てのｘについて、$f(x)=2x-f(f(x))$を満たし、$f(0)=0$である。

⑴　ｆ(ｘ)が第２次導関数を持つ時、$f'(0)$及び$f''(0)$の値を求めよ。

⑵　ｆ(ｘ)がｘの多項式であると仮定して、ｆ(ｘ)を決定せよ。

＜省略＞

例１８．　正の整数に対して定義された関数ｆは、次の性質を持っている。

$$f(n)=\begin{cases} n-4 & n\geqq 500 \\ f(f(n+9)) & n<500 \end{cases}$$

この時、$f(50)$を求めよ。

例１９．　ｆ(ｘ)をｎ回微分したものを$f^{(n)}(x)$とする。

$\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}=\dfrac{{}_{2n}C_n}{n+1}$（カタラン数）$=a_n$と置くと、

$$\begin{cases} a_0=1 \\ a_{n+1}=a_0a_n+a_1a_{n-1}+\cdots+a_na_0 \end{cases}$$

…① なる漸化式を満たす。

この時、$f(x)=\dfrac{2}{1+\sqrt{1-4x}}$となることを示せ。

＜省略＞

参５．　どんな風に１次以上の整数係数多項式ｆ(ｘ)を取っても、$f(1), f(2), f(3), \cdots$のうちに素数でないものが必ず表れることを示せ。　(重要問題)

<省略>

参13．⑴ 整数係数のある多項式 $f_0(x), f_1(x), \cdots, f_{n-1}(x)$ を用いて、

$$\sum_{k=1}^{p} k^n = \frac{1}{n+1} p(p+1)\cdots(p+n-1)(p+n) - f_{n-1}(x)\sum_{k=1}^{p} k^{n-1}$$

$$- f_{n-2}(x)\sum_{k=1}^{p} k^{n-2} - \cdots - f_0(x)\sum_{k=1}^{p} k^0$$ と表されることを証明せよ。

⑵ pを素数とすると、(mod p) に対して、

$$1^n + 2^n + \cdots + (p-1)^n + p^n \equiv \begin{cases} 0 & (0 \leqq n \leqq p-2) \\ p-1 & (n=p-1) \end{cases}$$ が成り立つこと

を証明せよ。但し、$p^0 \equiv 1$ とする。

<省略>

参16． $f(x)=(x^2+1^2)(x^2+2^2)(x^2+3^2)\cdots(x^2+n^2)+1$ は2つの１次以上の整数係数多項式の積として表せないことを証明せよ。但し、nは任意の自然数である。 (99 第9回数学オリ・本選)

<省略>

参31．⑴ $\ell og\, x$ は多項式関数でないことを示せ。即ち、「全ての正数 $x>0$ に対して、$\ell og\, x = a_0 + a_1 x + + a_n x^n$ が成り立つ」ような定数 $a_0, a_1, \cdots, a_n$ は存在しないことを示せ。

⑵ $\ell og\, x$ は有理関数でないことを示せ。即ち、「全ての正数 $x>0$ に対して、

$$\ell og\, x = \frac{a_0 + a_1 x + \cdots + a_m x^m}{b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n}$$ が成り立つ」ような定数 $a_0, \cdots, a_m$,

$b_0, \cdots, b_n$ は存在しないことを示せ。

<省略>

【14】 ガウス記号

例1． $\left|\frac{3}{2}x-3\right|=[x-1]$ を満たすxの値を求めよ。[ ]はガウス記号。

<省略>

例14． 実数xに対して、[x]はxを超えない最大の整数を表すことにする。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{30}[\ell og_3 k]$ を求めよ。

(2) nを正の整数とする時、$n=3^\ell+m$, $0\leqq m<2\cdot 3^\ell$ となる整数ℓ, mをnで表せ。

(3) rを1でない数、nを正の整数とする時、$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k r^{2k}$ とする。

S_n-rS_n を計算することにより、S_n を求めよ。

(4) nを正の整数とする時、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}[\ell og_3 k]$ を求めよ。

＜省略＞

例３１． ある自然数nに対して、$\dfrac{1}{n}, \dfrac{2}{n}, \cdots, \dfrac{n-1}{n}$ の値を小数第2位を四捨五入して、小数第1位まで順に求めた。その中に 0.1, 0.2 がそれぞれ2つずつあった。このようなnを全て求めよ。

＜省略＞

例３６． 実数xに対し、x以下の最大の整数を$[x]$で表すことにする。

(1) cは実数で定数とする。xが実数全体を動く時の $[c+x]-[x]$ の取り得る値を $[c]$ を用いて表せ。

(2) a, bは実数とし、$f(x)=-2x(x-2)$ とする。
$[b+f(a)]-[f(a)]=0$, $0\leqq a\leqq 2$ となるような点(a, b)の動きうる範囲を a－b 平面に図示せよ。

＜省略＞

例３８． 実数xに対して、xを超えない最大の整数を$[x]$で表す。$a_m=[\sqrt[3]{m}]$ $(m=1, 2, \cdots)$ に対して、数列$b_1, b_2, b_3, \cdots$ を $b_1=0$, $k\geqq 2$ の時、$a_m<k\leqq a_{m+1}$ となるmに対して $b_k=m$ と定める。次の問いに答えよ。
ここで、便宜上 $\ell=n^3$ とする。

(1) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 全ての自然数nに対して、$\displaystyle\sum_{m=1}^{\ell} a_m+\sum_{k=1}^{n} b_k=n^4$ が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\sum_{m=1}^{\ell}[\sqrt[3]{m}]$ を求めよ。

＜省略＞

例４３． 0以上の整数に対して定義された関数fは、次を満たすとする。$f(0)=0$,

$f(x)=f\left(\left[\dfrac{x}{10}\right]\right)+\left[\ell og_{10}\dfrac{10}{x-10\left[\dfrac{x-1}{10}\right]}\right]$, $0\leqq x\leqq 1996$ の時、

ｆ（ｘ）が最大になるのは ｘがいくつの時か。但し、実数ｘに対し、[ｘ]はｘを超えない最大の整数を表す。

＜省略＞

【15】［ 不 等 式 ］

例１３．　次の不等式を証明せよ。（但し、$a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ は正の数とする）

$$a_1^{a_1} a_2^{a_2} a_3^{a_3} \cdots a_n^{a_n} \geqq (a_1 a_2 a_3 \cdots a_n)^{\frac{a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n}{n}}$$

＜省略＞

例２０．　次の連立不等式を満たす整数の組（ｘ，ｙ）を全て求めよ。

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{2\log_{\frac{1}{2}}(2x-1)} \leqq y^2-6, \quad 3^{\log_a y^2} \leqq 3x^2+6$$

＜省略＞

例２９．　２より大きい整数ｎを固定する。ｎ個の任意の正の数 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ に対して、不等式 $K < \frac{a_1}{a_1+a_2} + \frac{a_2}{a_2+a_3} + \cdots + \frac{a_n}{a_n+a_1} < G$ が成り立つような定数Ｋの最大値と定数Ｇの最小値を求めよ。　（90 数学オリ・予選）

＜省略＞

参５．　自然数の関数を次のように定義する。

$$f(i, j) = \begin{cases} 1 & (i \leqq j \text{ かつ } i+j \text{ が平方数}) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases},$$

$a(j) = f(1, j) + f(2, j) + \cdots + f(i, j)$,

$b(n) = a(1) + a(2) + \cdots + a(n)$

⑴　ｉｊ平面に、$f(i, j) = 1$ となる位置を記せ。

⑵　$a(j) \geqq 3$ を満たす最小の j を求めよ。

⑶　$b(n) \geqq 12$ を満たす最小の n を求めよ。

⑷　$a(k^2+1) \geqq 12$ を満たす最小の自然数ｋを求めよ。但し、必要であれば、$\sqrt{1460} = 38.\cdots$, $\sqrt{1570} = 39.\cdots$, $\sqrt{1684} = 41.\cdots$ を用いよ。　（大数・類題）

#【16】 ［ 数　列 ］

例６． nを自然数とし、3または -3 を $2n$ 個並べた数列 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2n})$ を考える。
例えば、$n=1$ の時は、$(3,3), (3,-3), (-3,3), (-3,-3)$ の4通りがある。

⑴ $\dfrac{1}{6}(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})$ は整数であることを示せ。

⑵ $\dfrac{1}{6}(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})$ が奇数となるような数列 $(a_1, a_2, \cdots, a_{2n})$ は全部で何通りあるか。

＜省略＞

例１１． 自然数nは、自然数mと整数r $(0\leqq r\leqq m)$ を用いて、
$n=(1+2+3+\cdots+m)+r$ のように表される。この時、数列 $\{a_n\}$ を
次の式で定める。$a_n=\dfrac{r^2}{m}$

⑴ $n=1, 2, \cdots, 8, 9$ について、整数の組 (m, r) を求めよ。

⑵ a_{120}, a_{124} を求めよ。

⑶ $n=(1+2+3+\cdots+m)+m$ の時、$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ をmで表せ。

例１２． 等差数列 $\{a_n\}$ は、$0>a_1+a_2+\cdots+a_{96}>-a_{97}$ を満たしている。
この時、$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k\cdot a_k$ が正となる最小の正の整数nを求めよ。

＜省略＞

例１５． m, nを負でない整数とし、平面上の点 (m, n) に数 $a(m, n)$ が与えられている。$a(m, n)=n\cdot 3^m$ とする時、

⑴ $a(3,0)+a(2,1)+a(1,2)+a(0,3)$ を求めよ。

⑵ kを自然数とする。点 $(k, 0)$, 点 $(0, k)$ を結ぶ線分上にある点 (m, n) に与えられている数 $a(m, n)$ の和を求めよ。

⑶ ℓ を自然数とする。$x\geqq 0$, $y\geqq 0$, $x+y\leqq \ell$ で表される領域に含まれる数 $a(m, n)$ の和が2000以上になるような最小の自然数 ℓ を求めよ。

＜省略＞

例１７．　$S(m)=\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$ と置く。

⑴ 数列$\{a_n\}$が $a_n=4n$ により与えられている。和$\sum_{k=1}^{3n}\frac{1}{a_k}$ を$S(3n)$を用いて表せ。

⑵ 数列$\{b_n\}$を 1, 2, 5, 7, 10, 11, 13, 14, 17, … のように 3 の倍数でも 4 の倍数でもない正の整数を順に並べたものとする。
和$\sum_{k=1}^{6n}\frac{1}{b_k}$ を $S(n)$, $S(3n)$, $S(4n)$, $S(12n)$を用いて表せ。

＜省略＞

例４４．　正の整数kに対して、$\left(k+\frac{1}{3}\right)^3$ に最も近い整数をa_kとする時、

⑴ $\sum_{k=1}^{n}\left|a_k-\left(k+\frac{1}{3}\right)^3\right|$を求めよ。　⑵ $\sum_{k=1}^{n}(a_k-k^3-k^2)$ を求めよ。

＜省略＞

例５３．　1～n のn個の自然数のうちから異なるk個を取って作った積の総和を$S(n,k)$と置く。但し、$n\geqq k$ で、例えば、

$S(n,1)=1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, $S(3,2)=1\cdot2+1\cdot3+2\cdot3=11$,

$S(4,3)=1\cdot2\cdot3+1\cdot2\cdot4+1\cdot3\cdot4+2\cdot3\cdot4=50$ である。

⑴ $\sum_{i=1}^{n}i^4$, $\sum_{i=1}^{n}i^5$ をnで表せ。　⑵ この時、$S(50,3)$の値を求めよ。

＜省略＞

参１０．　$a_1=a_2=1$, $a_{n+2}=a_{n+1}+a_n$ で定まる数列を$\{a_n\}$、a_nを整定数mで割った余りをb_nとする。例えば、m＝5 とすると、$\{b_n\}$は、
$\underline{1, 1, 2}$, 3, 0, 3, 3, 1, 4, 0, 4, 4, 3, 2, 0, 2, 2, 4, 1, 0, $\underline{1, 1, 2}$, 3, 0, … なる数列となる。
任意の自然数mに対して $b_{n+k}=b_n$ なる自然数kが存在することを示せ。
kの値はmによって異なる。

参１１．　$f(1)=1$, $f(2)=1$ の時、$f(m+2)=f(m+1)+f(m)$ を満たす関係式で表される$f(m)$をフィボナッチ数という。このフィボナッチ数のうちで、下n桁が 9 になることを証明せよ。

＜省略＞

【17】 ［ 集　合 ］

＜省略＞

例5. $A=\{1,2,3,4,5,6\}$, $B=\{7,8,9\}$ と置く。

⑴ 集合Aから集合Bへの写像で、Bの「上への」写像となるものは幾通りあるか。

⑵ AからBへの写像 f で、$f(1)\leqq f(2)\leqq f(3)\leqq f(4)\leqq f(5)\leqq f(6)$ となるものは幾通りあるか。

＜省略＞

例8. $a_1<a_2<a_3<a_4<a_5$ を満たす正整数 a_k を要素とする集合
$A=\{a_1,a_2,a_3,a_4,a_5\}$ と $a_k{}^3$ を要素とする集合
$B=\{a_1{}^3,a_2{}^3,a_3{}^3,a_4{}^3,a_5{}^3\}$ に対して共通集合 $A\cap B$ を作ったら、
$A\cap B=\{a_1,a_4\}$, $a_1+a_4=28$ となった。さらに、和集合 $A\cup B$ を作ったら、
この集合に属する要素の和が 41824 になった。この時、次の問いに答えよ。

⑴ a_1, a_4 の値を求めよ。

⑵ $a_2+a_3+a_5+a_2{}^3+a_3{}^3+a_5{}^3$ の値を求めよ。

⑶ a_5 は 29 となるかどうかを調べて、a_5 の値を求めよ。

⑷ 集合Aを定めよ。

＜省略＞

例10. Aを次の条件①,②を満たす正の整数の集合とする。但し、$1\in A$ とする。

① 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17 以外の素因数を持たない

② $2^2, 3^2, 5^2, 7^2, 11^2, 13^2, 17^2$ のいずれでも割り切れない。

Aの要素 n の逆数 $\dfrac{1}{n}$ の総和 $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\cdots+\dfrac{1}{2\cdot3\cdot5\cdot7\cdot11\cdot13\cdot17}$ を求めよ。

＜省略＞

参6. Nを正の整数全体の集合とする。NからNへの写像 p, q を次のように定義する。
$p(1)=2$, $p(2)=3$, $p(3)=4$, $p(4)=1$, $n\geqq5$ の時は、$p(n)=n$
$q(1)=3$, $q(2)=4$, $q(3)=2$, $q(4)=1$, $n\geqq5$ の時は、$q(n)=n$
この時、次の問いに答えよ。

⑴ NからNへの写像 f をうまく作ると、全ての $n\in N$ に対して、$f(f(n))=p(n)+2$ が成り立つ。そのような写像 f の一例を挙げよ。

⑵ NからNへの写像 f をどのように定義しても、全ての $n\in N$ に対して、$f(f(n))=q(n)+2$ が成り立つようにするのは不可能であることを証明せよ。 (91 数学オリン)

＜省略＞

【１８】　個　数　処　理

＜省略＞

例８、 1 から 9 までの自然数の順列 $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_9$ のうちで、条件
$a_1 > a_4 > a_7$ かつ $a_2 < a_5 < a_8$ かつ $a_3 < a_6 < a_9$ を満たすものは
何通りあるか。

例９． ｘｙ平面上の点Ｐ(ｍ，ｎ)において、ｍとｎが共に整数である時、点Ｐを格子点という。格子点(ｍ，ｎ)から(ｍ＋1，ｎ＋1)への移動をＳ、格子点(ｍ，ｎ)から(ｍ－1，ｎ＋1)への移動をＴとする。Ｓ，Ｔを適当に繰り返すことによる格子点Ｐから格子点Ｑへの移動の仕方をＰからＱへの道と呼ぶ。

⑴ 原点(0, 0) から Ａ(0, 8) への道の個数を求めよ。

⑵ Ｂ(1, 1) から Ｃ(1, 7) への道の中で ｙ軸上の点を通る道の個数は、
Ｂ(1, 1) からＤ(－1, 7) への道の個数と等しいことを示せ。

⑶ Ｂ(1, 1) から Ｃ(1, 7) への道の中で ｙ軸上を通らない道の個数を求めよ。

＜省略＞

［類題10］ ｎを正の整数とし、ｎ個のボールを 3 つの箱に分けて入れる問題を考える。但し、1 個のボールも入らない箱があっても良いものとする。以下に述べる 4 つの場合について、それぞれ相異なる入れ方の総数を求めたい。

① 1 からｎまで異なる番号の付いたｎ個のボールを、Ａ，Ｂ，Ｃと区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

② 互いに区別の付かないｎ個のボールを、Ａ，Ｂ，Ｃと区別された 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

③ 1 からｎまで異なる番号の付いたｎ個のボールを、Ａ，Ｂ，Ｃと区別の付かない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

④ ｎが 6 の倍数 6ｍである時、ｎ個の互いに区別の付かないボールを区別の付かない 3 つの箱に入れる場合、その入れ方は全部で何通りあるか。

(96 東大・理・後)

例１１． ⑴ 1 から 7 までの全ての整数を 1 列に並べて出来る順列を $a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, a_6, a_7$ とする。この時、積 $a_1 a_2$ が 8 となる順列は全部で $\boxed{\quad}$ 通りある。また、$a_1 + a_2 = 9$ となる順列は全部で $\boxed{\quad}$ 通りある。

⑵ 1 から 11 までの全ての整数を1列に並べて出来る順列を $a_1, a_2, \cdots, a_{11}$ とする。この時、$a_1 + a_2, a_3 + a_4, a_5 + a_6, a_7 + a_8, a_9 + a_{10}$ が全て等しくなる時、a_{11} は $\boxed{\quad}$ 通りの場合があり、このような順列の総数は $\boxed{\quad}$ 通りある。

【１９】　格　子　点

＜省略＞

例１１．　x, y が共に整数であるような座標平面上の点 (x, y) を格子点という。n, k が 0 または 正の整数の時、$0 \leqq x + y \leqq n$，$\dfrac{1}{3}x \leqq y \leqq x$ を満たす格子点の集合を $D(n)$ とし、$x + y = k$，$\dfrac{1}{3}x \leqq y \leqq x$ を満たす格子点の集合を $E(k)$ とする。次の問に答えよ。

⑴ $E(k)$ の点の個数を求めよ。　　⑵ $D(23)$ の点の個数を求めよ。

⑶ ℓ が 0 または 正の整数の時、$E(4\ell) = \{(a_1, b_1), (a_2, b_2), \cdots$
$\cdots, (a_m, b_m)\}$（m は $E(4\ell)$ の点の個数）として、$\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i b_i$ を ℓ で表せ。

＜省略＞

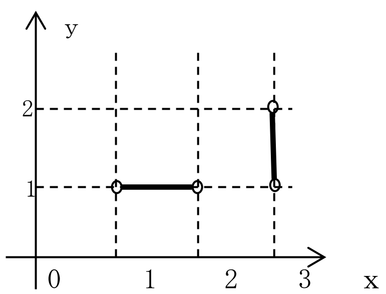
例１３．　xy 平面で、x 座標、y 座標が共に 0 以上の整数となるような点を非負格子点という。非負格子点 $P(x, y)$ にその番号 $N(P)$ を $N(P) = 2^x(2y + 1)$ で付ける。

⑴ 番号が 5184 番になる非負格子点の座標を求めよ。

⑵ 整数 $n, n+2, n+4$ を番号に持つ非負格子点を、それぞれ A, B, C とする。2 以上の整数 a により、$n = 2^a(2^a + 1)$ となっている時、$\triangle ABC$ の面積を a で表せ。

＜省略＞

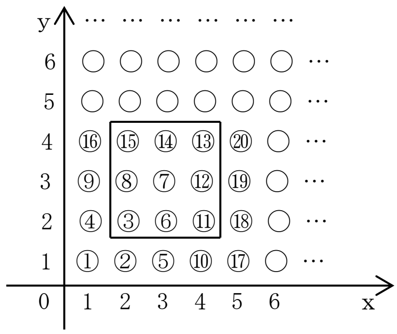
例１８．　座標平面において、x 座標と y 座標が共に整数となる点を格子点という。また、2 つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分から両端の点を除いたものを格子辺という。次の問に答えよ。



⑴ 点 $P(420, 10584)$ を通る直線 $y = ax$（a は定数）は $0 \leqq x \leqq 420$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。

⑵ n を 2 以上の整数とする。点 $P(420, 10584)$ を通る曲線 $y = bx^n$（b は n により定まる定数）は、$0 \leqq x \leqq 420$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。

例１９．第一象限の格子点（ｘ座標、ｙ座標が共に整数の点）に１から$(3n)^2$までの数を右図のように並べる。今、図のように上下左右に隣り合った９個の数を正方形で囲むことを考え、その左下の数をａとする。（このような囲み方は$(3n-2)^2$通りあり、図のの場合は、ａ＝3である）



⑴ ａが格子点$(1, k)$$(k \geqq 3)$上にある時、囲まれた９個の数の和を３で割った余りを求めよ。

⑵ ａが格子点$(k, k)$$(k \geqq 3)$上にある時、囲まれた９個の数の和が３の倍数になるためのｋの条件を求めよ。

⑶ ９個の数の和が３の倍数になるような囲み方は何通りあるか。

＜省略＞

例２３．座標平面上で、ｘ座標とｙ座標が共に整数である点を格子点と呼ぶ。格子を頂点とし、辺の長さが１である正方形(周は含まない)を単位正方形と呼ぶことにする。ｐ,ｎを自然数とし、領域 $D_n=\{(x, y) \mid 0 \leqq x \leqq n^p, 0 \leqq y \leqq x^{1/p}\}$ を考え、その面積をS_nとする。L_nとM_nを、それぞれD_nに含まれる格子点の個数及び単位正方形の個数とする。

⑴ グラフ $y=x^{1/p}$ $(0 \leqq x \leqq n^p)$と交わる単位正方形の個数は、n^pであることを示せ。

⑵ 不等式 $M_n < S_n < M_n + n^p$ を示せ。また、面積S_nを求めよ。

⑶ 極限値 $\lim_{n \to \infty} n^{-p} \cdot L_n$ を求めよ。

例２４．自然数の関数を次のように定義する。

$$f(i, j)=\begin{cases} 1 & (i \leqq j \text{ かつ } i+j \text{ が平方数}) \\ 0 & (\text{その他の場合}) \end{cases}$$

$a(j)=f(1, j)+f(2, j)+\cdots+f(i, j)$, $b(n)=a(1)+a(2)+\cdots+a(n)$

⑴ ｉｊ平面に、$f(i, j)=1$となる位置を記せ。

⑵ $a(j) \geqq 3$ を満たす最小のｊを求めよ。

⑶ $b(n) \geqq 12$ を満たす最小のｎを求めよ。

⑷ $a(k^2+1) \geqq 12$ を満たす最小の自然数ｋを求めよ。但し、必要であれば、$\sqrt{1460}=38.\cdots$, $\sqrt{1570}=39.\cdots$, $\sqrt{1684}=41.\cdots$ を用いよ。

＜省略＞

参１．一辺の長さが自然数の立方体ＡＢＣＤ－ＥＦＧＨ（ＡＢＣＤ，ＥＦＧＨは，それぞれ立方体の面）がある。３点Ａ,Ｂ,Ｄが格子点（ｘ,ｙ,ｚ座標が全て整数）であるならば、全ての頂点は格子点であることを示せ。（大数・類題）

＜省略＞

参７． 座標空間において、原点ＯとＡ(2, 3, 5)を通る直線ℓとし、ℓ上にない格子点（ｘ，ｙ，ｚ）（ｘ，ｙ，ｚが全て整数である点)のうちで、ℓに最も近い点について、その点とℓの距離をＬとする。

⑴ ℓと点（ｘ，ｙ，ｚ）との距離は、次の形で表されることを示せ。

$$\sqrt{\frac{(3x-2y)^2+(5y-3z)^2+(2z-5x)^2}{38}}$$

⑵ $L \geqq \sqrt{\dfrac{3}{38}}$ であることを示せ。

⑶ 任意の点Ｃを、Ｃ（ａ，ｂ，ｃ）とすると、Ａ(2, 3, 5)のように、ｃ＝ａ＋ｂ を満たす時のＬを求めよ。但し、整数ｐ，ｑが互いに素である時、ｐｘ－ｑｙ＝1を満たす整数ｘ，ｙが存在することは既知として良い。

＜省略＞

参１０． ｘｙ平面上で、ｘ≧1， ｙ≧1 を満たす領域をＦ領域、Ｆ領域の格子点で、ｘ座標とｙ座標が互いに素であるものをＦ格子点と呼ぶ。この時、正の有理数ｒに対して、以下の条件(＊)を満たす傾きｒの直線ℓ_rが存在することを示したい。

（＊） ℓ_rはＦ領域において、Ｆ格子点を通り、Ｆ格子点以外の格子点を通らない。
但し、ｘｙ平面上の点（ａ，ｂ）が格子点であるとは、ａ，ｂが共に整数であることである。注：互いに素な自然数ｐ，ｑに対し、ｐｘ－ｑｙ＝1 を満たす整数ｘ，ｙが存在することは証明なしに使って良い]

⑴ $r=\dfrac{2}{15}$ に対して、直線$\ell_{2/15}$となるべきものを１ つ挙げよ。

⑵ 一般の正の有理数ｒに対して、直線ℓ_rが存在することを示せ。

【２０】 そ の 他

§１．ｎ角形の内角に関する問題

例６． $\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおいて、$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$，$\tan x=\dfrac{2t}{1-t^2}$ の時、次の⑴,⑵が成立することを示せ。

⑴ $\tan\dfrac{x}{2}$ が有理数になるための必要十分条件は、sinｘ，cosｘ が共に有理数になることである。但し、ｘは $|x|<\pi$ とする。

⑵ ⑴のｘが、各辺の長さ整数である直角三角形の直角でない１つの角の大きさである時、各辺の長さの比は、q^2+p^2，$2pq$，q^2-p^2（ｐ，ｑは互いにな整数で、$q>p>0$) の比で表される。 (91 同大・工)

§ ２． 関数 及び 図形に関する問題

＜省略＞

例２． 点$P_1(x_1, y_1)$，$P_2(x_2, y_2)$ は $y = ax + b$ のグラフの上にあり、点$P_3(x_1, y_2)$，$P_4(x_2, y_1)$ は $y = x(4-x)$ のグラフの上にある。但し、a, b, x_1, x_2 は正の整数とし、$x_1 \neq x_2$ とする。この時、a, b, x_1, x_2 を求めよ。

例３． 実数r（$r > 0$）に対して、下の方程式①の定める球面と、②の定める平面の共通部分をDとする。$x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{1}{3}(r^2 + 8)$ …①，

$x + y + z = r$ …②

⑴ 点P，Qが共にDに属すれば、$|\overrightarrow{PQ}| \leqq 4\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ が成り立つことを示せ。

⑵ rが自然数の時、連立方程式①，②の整数解を決定せよ。

＜省略＞

参１． 座標平面において、x軸上に3 個の点$P_0(0, 0)$，$P_2(c, 0)$，$P_2(2, 0)$ を取り、直線 $y=1$ 上に$(n+1)$個の点$Q_0(0, 1)$，$Q_2(1, 1)$，$Q_2(2, 1)$，…，$Q_n(n, 1)$ を取る$(n \geqq 1)$。但し、cは$0 < c < 2$ なる無理数とする。

点P_iと点Q_jを結ぶ線分をP_iQ_j（$i = 0, 1, 2$；$j = 0, 1, \cdots, n$）とし、これら$3(n+1)$本の線分から生じる交点の総数をa_nとする。但し、P_i（$i = 0, 1, 2$），Q_j（$j = 0, 1, \cdots, n$）は交点とは見なさない。

⑴ どの交点においても、これらの線分の中の3 本が同時に交わることはない。このことを証明せよ。

⑵ $a_n - a_{n-1}$ （$n \geqq 2$）を求めよ。　⑶ a_n （$n \geqq 1$）を求めよ。　(97 北大)

§ ３． その他

＜省略＞

例３． 整数a, bに対して、$a * b = a^2 + b^2 - ab$ と定める時、$4*\{3*(2*1)\}$ の値を求めよ。

例４． $\begin{pmatrix} p \\ n \end{pmatrix} = \dfrac{p(p-1)(p-2)\cdots(p-n+1)}{n!}$ と定める時、$\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 8 \end{pmatrix}$ の値を求めよ。
但し、pは整数で、nは自然数とする。

＜省略＞