刊行するにあたって

この度、私がこの「整数問題事典」を刊行する切っ掛けになったのは、私の塾のある生徒が、整数問題を質問したことからでした。私は、当塾の塾長（講師でもある）として、面子にかけて、何が何んでも解こうと奮闘努力をしましたが、さすがに整数問題は数学一（？）難しい分野のため、なかなか解くことが出来ません。私は、このまま、おめおめと、「生徒に解けない」とは言えないし、かといって、今のままでは、限られた時間内で、自力で解くことも出来そうもないし、途方に暮れてしまいました。そこで、思い付いたのは我が町の本屋という本屋（古本屋も含む）へ行って、それに類似した問題を見付け出すという作戦でした。早速、本屋へ行き、立ち見で調べようとしましたが、私の長時間の居座りに対する店員の厳しい目に、私のプライドが負け、仕方無く、市販されている整数の問題集を全て買って調べることにしました。（余談ですが、それを行なうことは、多額の出費を意味し、私の置かれている金銭的状況(貧乏)を考えれば、とても実行不可能なはずなのに、何と！自分のちっぽけなプライドのため、実行してしまいました！　如何に、私が、見栄っぱりであったかを嫌という程、痛感させられました。（笑））

私は、整数問題を分類していく中で分かったことですが、問題集の多くは、同じ問題が非常に多くて、目新しい問題が本当に少ないということです。これには、大変驚かされました。しかし、よく考えてみると、これは仕方ないことであります。というのは、最も人数の多い学力中間層を狙って（商売上）、パターン化された解法のテクニックを修得させるため、このような標準問題をどの出版社も取り上げていることにあります。

ただ、これは「整数」の分野に限った特徴ではないのかもしれませんが ……。

今回の私のように、いざ、ユニークな整数問題を調べようとすれば、どの出版社も似通った問題集となっているため、参考書を多数買わなければなりません。私は、このような現状を目の当たりにして、現在ある問題集に対して、不便さを身に染みて感じると共に、疑問も感じました。それは、「有りとあらゆる問題を網羅した辞書的な問題集があれば、１冊揃えるだけで済むし、受験生の金銭的負担も大いに軽減出来るのに、何故、そういう本が出来ないのだろうか？」ということでした。私は、この疑問を解決するため、「ただ、そういった本が出来上がるのをじっと待っていても、いつになるか分からないので、そういう本が今無いのなら、いっそのこと自分で作る以外ない！」と考え、「整数問題事典」の刊行を決断するに至りました。ところが、決断したのは良いけれど、本業の合間の執筆作業、並びに、私自身の力不足（即ち、大学入試問題に梃摺(てこず)ったり、あるいは、例題としての改題を新しく作るのに時間を要した）ため、10年程歳月が掛かり、更に、製本に 4 年の歳月が掛かり、ようやく何とか完成出来、今回、出版の運びとなりました。一刻も早く、受験生にこのような本の出版をしなければならなかったのですが……。

誠に、申し訳なく思っております。謹んでお詫び申し上げます。（著者：西園寺）

＜追　伸＞

尚、塾生の質問の件ですが、… 私は、はずかしながら、「give up」を致しました。後日、その生徒は自力で解き、私にその解法を教えてくれました。ああ…、情けない！

『整数問題を解く』とは…

整数は最初に小学校で習い始めるため、整数の問題は、一見、易しそうに見えます（公式もあまり覚えなくても良さそうに思えます）が、実は、数学の全ての分野に跨(また)がる総合学問であるため、かなり難しく、公式もあらゆるところから引っ張って来なければならず、これを解くのは、至難の業と言わざるを得ません。ですから、高校生・受験生に「数学で一番苦手とする分野は何ですか？」と訊ねたら、「整数」と答える方が多いのも当然と言えましょう。

しかし、反面、問題が解けた時は、何にも増して、喜びを味わうことが出来、更には、整数の持つ性質の「美しさ」に驚嘆せざるを得ないでしょう。これを味わうため、是非とも、私は、高校生・受験生の多くの方に、挑んでほしいと思っています。

また、整数問題に挑めば、解く喜びを味わえるのは勿論のこと、実益もあります。それは、今後、ますます、大学入試の数学に整数問題が増える傾向にあるということです。何故なら、最近の数学の入試が、「考える力」を重視する方向に向かっているからです。つまり、最近の全て入試傾向が、「暗記型」ではなく、「思考型」に変化しているので、その「思考型」の問題として、整数問題は、正に、最適と言わざるを得ないからです！

さあ、皆さん！　整数問題を考えて、知性の鍛練を行い、目指す大学の合格を勝ち取りましょう！

本書の特色

本書の特徴を以下に示す。「章」によっては、若干、下に示す内容と違うところもあるが、基本的には、以下に示す特徴で書かれている。

１．　本書は、高校生・受験生向けの受験用問題集であり、整数に関する問題の殆どを網羅した辞書的な問題集である。従って、高校生・受験生が自力で解けないような難しい整数問題に出くわしても、この本書の中に、それと同じ問題、または、類似した問題が必ず見つかるはずである。万が一、見つからない場合でも、解き方のヒント、及び、指針が、きっと得られるはずである。

２．　本書の問題は、辞書的な問題集であるので、教科書的な基礎レベルの問題から、東大・京大の入試、更には、数学オリンピックの本試・予選で出題された高度なレベルの問題までを取り扱っている。従って、自分の学力のレベルに合った使い方が出来るから、全ての中・高校生 及び その他の受験生に適した本となっている。

３．　本書の問題は、『**例．**』，［**類題**］，『**参．**』の三つから構成されている。

まず、本書の『**例．**』は、主に、過去の問題を参考にして、<u>筆者が新たに作った</u>類題である。過去の問題にだけ通用するような問題ではなく、その周辺の問題にも十分対応出来る(問題の本質理解が出来る)ように作ってある。つまり、過去の問題を一般化した(例えば、下の例に示すように、3 項までの問題を、ｎ項まで拡張したり、また

は、一般公式化した)問題に作り換えている。しかし、一般化し難い場合は、次数を上げたり、項数を増やしたりして、出来るだけ一般化に近い問題になっている。また、過去の問題が既に一般化になっている場合には、逆に、具体化した問題（nを用いて一般化された問題を、例えば、n＝3にする、等）にしている。

例；$\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n} \geqq \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$ （一般化）の証明が本書の『**例．**』

$\dfrac{a_1+a_2+a_3}{3} \geqq \sqrt[3]{a_1 a_2 a_3}$ （具体化）の証明が本書の［**類題**］

一方、［**類題**］は、上述したように、『**例．**』の問題を作る上で元になった過去の問題そのものであり、『**例．**』の問題が本当に定着したかどうかをチェックするために設けた。従って、『**例．**』の問題の方が［**類題**］に比べて難しくなっている。このような構成にした理由は、『**例．**』の問題(難解な問題)が理解出来れば、［**類題**］(実際の大学入試問題)は易しく感じられ、本番の入試において、安心して問題に挑むことが出来る、と考えたからであり、しかも、難解な問題(一般化した問題)の方が、問題の本質をよく表している場合が多く、問題の本質が見抜ければ、この周辺の問題に対しても広く対応出来る、と考えたからである。

『**参．**』は、［**類題**］と同様、過去の問題そのものである。その違いは、『**参．**』は、筆者が『**例．**』(過去の問題の新作類題)を作ろうとしたが、作れなかった問題で、しかも、問題として、非常に重要であるため、本書から外せなかった(∵ 辞書として)問題である。新作類題を作れない理由として、過去の問題が、唯一性(独自性)の高い特殊(非常にユニーク)な問題であることである。従って、新に、『**例．**』を作ろうにも作れないし、当然、［**類題**］も、作ろうにも作れないから、それを『**参．**』(代表問題)にするしかなかった。

四、　本書は、公式、定義、定理、… などを他の参考書などから引っ張り出さなくても済むように、最初の章にまとめて載せた。出来るだけ必要なものは記載したつもりである。従って、参考書としても十分活用出来るものになっていると思う。

五、　【解】の説明で、解り難いところに、☜ のマークで、更に説明の補足を加えた。また、重要事項、一般的定理、指針を、【解】の説明の後に、一目で分かるように線で囲んで（下の例を参照）示した。

例；

重要	**難問は、まず、変数nに、1, 2, 3,… を代入してみよう！** **（数値計算をしてみよう！）**

六、　本書は解き方において、2通り以上あるものの中で、特に重要と思われるものは【別解】として載せている。このいろいろなアプローチの仕方を身に付けることで、応用範囲の広い実戦的なものに対処出来る力が着くものと確信している。

七、　本書は辞書的であるので、知りたい問題をすぐ探せるように、**目次**に、全問題をそのまま記載した。但し、問題が『例．』と[類題]がほぼ同じ場合なら、どちらか一方(一般化に近い方)を記載し、異なる場合は両方を並べて記載した。

本書の活用法

本書は、出くわした整数問題が解らない時、それを解決するためのマニュアル(辞書)として用いてもらうことを念頭に作られています。ですから、これを全て制覇しようとするには、あまりに時間が掛かって、余程の時間的余裕のある人でないと無理と思われます。しかし、それでも究めたいと思っておられる方がいらっしゃるなら、自分の好きな項目(解決したい問題)から始めると良いでしょう。その方が、飽きずにやれると思います。また、自分のレベル以上の問題に出くわしたら固守せず飛ばしていって下さい！

次に、問題を解いていく場合の具体的なやり方について、説明します。
最初に、本書の例題を出来るだけ自分で考えてもらいます。その時、基本事項を忘れている場合は、各章の「基本事項」を振り返って下さい。自分の解答が出来たら、解答と照らし合わせて下さい。しかし、時間的余裕のない人は、１題当たり30分を目安にして、それ以内で解けなければ、解答を見て、理解していって下さい。この問題が解答通りになるまで、反復練習に励んで下さい。（大体、解ったぐらいでは、次に、その問題に出くわした時に、歯が立ちません！）　それが出来たのち、実際の入試問題から引用した本問の類題で本当に確実に出来るかどうか試して下さい。そこで出来たら、その問題はＯＫ！（つまり、定着した）ということになります。

高校生・受験生の皆様が、合格の栄光を勝ち取られることを期待しております！

目　次

１． 数と式の要点

【１】［整　数］ (Integer)