

波束変換 Wavelet Transform

市吉 修

2006/05/17

信号解析で用いられるフーリエ変換、ラプラス変換、Z変換等は時間軸上の無限区間の積分で定義される。現実の信号は時間の中で変化していく事により情報を伝達するのであるからこれらの変換だけでは不足の場合がある。

他方フーリエ級数、DFTは有限区間の信号を扱う。しかしながらそれらは周期関数による級数展開であり時間軸上では対象となる区間の信号波形を無限に繰り返すことに他ならない。

時間軸を適当に区切ってフーリエ解析を行えば時間的に変化する信号を時間、周波数軸の両面から把握することができる。実際多くの音声符号化では20ms程度の時間間隔に区切ったDFTによる方法が用いられている。しかし周波数の解像度は時間の長さの逆数で決まるため、固定の解像度では信号のすべての周波数域に対して最適化することはできない。例えば低周波に対しては短すぎる。即ち必要以上に頻繁に処理を行う事になる。

1. 時間と周波数の不確定性関係

現実の信号は時間と周波数の関数である。ところが時間と周波数とは密接に関係しており独立ではない。時間的な瞬間、 δ 関数は周波数的には ∞ の帯域によって定義されるし、周波数 f なる単一周波数関数とは時間軸上では無限の変数域の関数となる。

時間軸	周波数軸
$e^{i2\pi ft} \quad (-\infty < t < \infty)$	$\delta(f)$
$\delta(t)$	$[W \rightarrow \infty] [-W, W] \int e^{i(\omega t)} d\omega$
	$= [W \rightarrow \infty] W/\pi \cdot \sin(Wt) / Wt$

上の $\delta(t)$ の時間幅 Δt を有限帯域幅 $F(=W/2\pi)$ で近似すると

$$\Delta t = 1/F, \quad \text{又は}$$

$$\Delta t \cdot F = 1$$

となる。

一般的には次の不確定性関係が成り立つ。

時間、周波数位置

$$v(t) \leftrightarrow V(i\omega)$$

$$\|v\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |v(t)|^2 dt$$

$$\|V\|^2 = 1/2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |V(i\omega)|^2 d\omega$$

$$\|v\| = \|V\|$$

平均

$$T = \int t |v(t)|^2 dt / \|v\|^2 \quad (|v(t)|^2 / \|v\|^2 \text{は時間軸上の密度関数})$$

$\Omega = \int \omega \cdot |V(i\omega)|^2 df / \{|V|^2\}$ ($|V(f)|^2 / \{|V|^2\}$ は周波数軸上の密度関数)
分散

$$\Delta t^2 = \langle (t-T)^2 \rangle$$

$$\Delta \omega^2 = \langle (\omega - \Omega)^2 \rangle$$

このとき次式が成り立つ。

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq 1/2$$

証明

平均値の移動

$$w(t) = e^{i\Omega \cdot t} \cdot v(t+T)$$

とおくと

$$\langle t \rangle = \int t \cdot |w(t)|^2 dt = 0$$

$$\langle \omega \rangle = 1/2\pi \int \omega \cdot |W(i\omega)|^2 d\omega = 0$$

$$\Delta t^2 = \int t^2 \cdot |w(t)|^2 dt / \{|w|^2\}$$

$$\Delta \omega^2 = 1/2\pi \int \omega^2 \cdot |W(i\omega)|^2 d\omega / \{|W|^2\}$$

そこで

$$\Delta t^2 \cdot \Delta \omega^2 \cdot \{|w|^2\} \cdot \{|W|^2\} = \int t^2 \cdot |w(t)|^2 dt \cdot \int \omega^2 \cdot |W(i\omega)|^2 d\omega$$

$$\geq 1/4 \cdot \left[\int \int t \cdot \omega \{ w(t)^* \cdot W(i\omega) \cdot e^{i(i\omega t)} + w(t) \cdot W^*(i\omega) \cdot e^{-i(i\omega t)} \} dt d\omega \right]^2$$

(Schwarz inequality)

$$= 1/4 \cdot \left[\int t \{ w(t)^* \cdot dw/dt + w(t) \cdot dw^*/dt \} dt \right]^2$$

$$= 1/4 \cdot \left[\int t \{ d|w(t)|^2/dt \} dt \right]^2 \quad (\text{注 } dw/dt \leftrightarrow i\omega W(i\omega))$$

$$= 1/4 \cdot \left[-|w(t)|^2 @ [-\infty, \infty] + \int |w(t)|^2 dt \right]^2$$

$$= 1/4 \cdot \{|w|^2\}^2$$

故に

$$\Delta t^2 \cdot \Delta \omega^2 \geq 1/4$$

$$\Delta t \cdot \Delta \omega \geq 1/2$$

上の不確定性関係によって信号の時間位置と周波数位置を同時に正確に測定する事は不可能であり、一方を正確に測るには他方がぼけてしまう事になる。

このために連続な t と f の二変数に関して共に直交関係を満たす関数系の構築は不可能である。“瞬時周波数”は Chirp レーダや PLL の設計において極めて有用な概念であるが厳密には定義がやや曖昧である。測位システムにおいては正確な時間の測定が鍵であるがそのためには上の不確定性から要求される周波数帯域が必要となる。例えば 1 μ 秒の時間精度には 1 MHz 以上の帯域幅の信号が必要不可欠である。

2. 連続 Wavelet 変換

Mother Wavelet と Analyzing Wavelet

$$\psi(t) \rightarrow ; \quad \psi[\Omega, b](t) = \Omega^{1/2} \cdot \psi(\Omega(t-b))$$

$$\|\psi[\Omega, b](t)\|^2 = \|\psi(t)\|^2 = \int_{-\infty, \infty} \psi(t)^2 dt$$

Wavelet 変換

時間関数 $v(t)$ に対して

$$V(\Omega, b) = C^{(-1/2)} \int_{-\infty, \infty} \psi^*[\Omega, b](t) \cdot v(t) dt$$

但し C は定数。

逆変換

$$v(t) = C^{(-1/2)} \int_{-\infty, \infty} \int \psi[\Omega, b](t) \cdot V(\Omega, b) d\Omega db$$

逆変換の導出

$$\begin{aligned} & C^{(-1/2)} \int_{-\infty, \infty} \int \psi[\Omega, b](t) \cdot V(\Omega, b) d\Omega db \\ &= 1/C \int_{-\infty, \infty} \int \psi[\Omega, b](t) \cdot \int \psi^*[\Omega, b](\tau) \cdot v(\tau) d\tau d\Omega db \\ &= 1/C \int_{-\infty, \infty} \int \Omega^{1/2} \cdot \psi^*(\Omega(t-b)) \cdot \Omega^{1/2} \cdot \psi(\Omega(\tau-b)) \cdot v(\tau) d\tau d\Omega db \\ &= 1/C \int_{-\infty, \infty} \int \psi^*(\Omega t - \Omega b) \cdot \psi(\Omega \tau - \Omega b) \cdot v(\tau) d\tau \cdot \Omega d\Omega \cdot db \\ &= 1/C \int_{-\infty, \infty} v(\tau) d\tau \cdot \int \int \psi^*(\Omega t - x) \cdot \psi(\Omega \tau - x) \cdot dx \cdot d\Omega \quad (x = \Omega b, \Omega \text{ 固定}) \\ &= 1/C \int_{-\infty, \infty} v(\tau) d\tau \cdot \int R[\psi](\Omega(t - \tau)) d\Omega \end{aligned}$$

ただし

$$R[\psi](\theta) = \int_{-\infty, \infty} \psi^*(x - \theta) \cdot \psi(x) \cdot dx \quad \text{自己相関関数}$$

$$= 1/C \int_{-\infty, \infty} v(\tau) d\tau \cdot 1 / \int_{-\infty, \infty} R[\psi](x) dx$$

ここで

$$\int R[\psi](x) \cdot e^{(-j\omega x)} dx = |\Psi(j\omega)|^2 \quad (\text{Wienr-Khintchine の定理})$$

によって

$$\begin{aligned} &= |\Psi(0)|^2 / C \cdot \int_{-\infty, \infty} v(\tau) / \int_{-\infty, \infty} d\tau \\ &= v(t) \end{aligned}$$

吟味

これが成り立つには

$$|\Psi(0)|^2 / C \cdot \int_{-\infty, \infty} d\tau = \delta(t - \tau)$$

となる必要がある。

例 1 ガウス関数型窓関数

Mother wavelet ; $\psi(t) = e^{-(t^2/2)} \cdot e^{(it)}$

Analyzing wavelet ; $\psi[\Omega, b](t) = \Omega^{1/2} \cdot e^{-(\Omega(t-b)^2/2)} \cdot e^{(i\Omega(t-b))}$

フーリエ変換 ; $\Psi[\Omega, b](j\omega) = (2\pi/\Omega)^{1/2} \cdot e^{-(\omega/\Omega - 1)^2/2} \cdot e^{(-i\omega b)}$

$$|\Psi(0)|^2 = (2\pi/\Omega) \cdot e^{-2}$$

時間周波数的な局在性(Locality)

時間的な位置 ; $|\psi[\Omega, 0](t)| / |\psi[\Omega, 0](0)| = 1/e$ となるのは $t = 1/\Omega, -1/\Omega$
 中心は $t = b = 0$
 時間範囲は $[-1/\Omega, 1/\Omega]$

周波数的な位置 ; $|\Psi(j\omega)| / |\Psi(\Omega)| = 1/e$ となるのは $\omega = 0, 2\Omega$
 中心は $\omega = \Omega$
 周波数範囲は $[0, 2\Omega]$

例 2 釣鐘型窓関数

Mother wavelet ; $\psi(t) = 1/(1+t^2) \cdot e^{it}$
 Analyzing wavelet ; $\psi[\Omega, b](t) = \Omega^{1/2} / (1+(\Omega t)^2) \cdot e^{i\Omega t}$
 フーリエ変換 ; $\Psi[\Omega, b](j\omega) = \pi(\Omega)^{-1/2} \cdot e^{-(\omega/\Omega - 1)} \cdot e^{-i\omega b}$
 $|\Psi(0)|^2 = (\pi/e)^2 / \Omega$

時間周波数的な局在性(Locality)

時間的な位置 ; $|\psi[\Omega, 0](t)| / |\psi[\Omega, 0](0)| = 1/2$ となるのは $t = 1/\Omega, -1/\Omega$
 中心は $t = b = 0$
 時間範囲は $[-1/\Omega, 1/\Omega]$

周波数的な位置 ; $|\Psi(j\omega)| / |\Psi(\Omega)| = 1/e$ となるのは $\omega = 0, 2\Omega$
 中心は $\omega = \Omega$
 周波数範囲は $[0, 2\Omega]$

吟味

上の逆変換が成り立つには

$$|\Psi(0)|^2 / C \int |t - \tau| = \delta(t - \tau)$$

となることが必要。

確かに $t = \tau$ に対して ∞ となる。

しかし $t \neq \tau$ に対して 0 とはならない。

デルタ関数の定義は

$$\begin{aligned} \delta(t) &= [-\infty, \infty] \int e^{i(\omega t)} d\omega \\ &= [W \rightarrow \infty] [-W, W] \int e^{i(\omega t)} d\omega \\ &= [W \rightarrow \infty] W/\pi \cdot \sin(Wt) / Wt \end{aligned}$$

なる極限として定義された。帯域幅 W が有限な場合には $t = 0$ で大きさ W/π 、時間幅は主パルス幅が $\pm \pi/W$ であるが厳密には時間的に制限されない $\sin(x)/x$ の関数である。

このようにデルタ関数は帯域幅が有限な場合には近似的なものではない。

Wavelet 変換の場合には一変数 t の関数を二次元平面 (b, Ω) 即ち [時間、周波数] 空間に変換するが時間-周波数の不確定性関係のために逆変換公式は厳密には成立しないと思われる。

しかし $1/(t - \tau)$ なる関数は十分デルタ関数的であり、Wavelet 変換は [時間、周波数] の二次

元空間で信号を捕らえる点で生物の音声処理に近く、有用である。

人間の場合は耳のかカタツムリ管で鼓膜から入力される音波を周波数分析する。カタツムリ管は入り口が広く、奥に行くほど狭い円錐形をしており入り口付近の感覚細胞は低音、奥の感覚細胞は高音に対して反応する。このように人間の耳は一種の実時間周波数分析機であり耳から入る時間信号を[時間、周波数]空間に変換し、その上で音声認識等の信号処理を行っている。

Wavelet 変換は生物の音声信号処理に近い処理を可能にし、種々の窓関数によって、多種多様な「耳」をモデル化する事ができる。

3. 正規直交 Wavelet

上の場合は Analyzing Wavelet

$$\psi[\Omega, b](t) = \Omega^{1/2} \cdot \psi(\Omega(t-b))$$

の Ω 、 b はいずれも連続量であったがこれを離散系列することを考える。

そこで

$$\Omega \rightarrow 2^m \quad ; m=0, +1, +2, +3, \dots$$

$$b \rightarrow n, \quad ; n=0, +1, +2, +3, \dots$$

$$\psi[\Omega, b](t) \rightarrow \psi[m, n](t) = 2^{m/2} \cdot \psi(2^m(t-n))$$

もしも内積

$$\begin{aligned} \langle \psi[m, n](t), \psi[k, l](t) \rangle &= [-\infty, \infty] \int \psi[m, n](t) \cdot \psi^*[k, l](t) dt \\ &> \delta[m, k] \cdot \delta[n, l] \end{aligned}$$

$$\text{但し } \delta[n, l] = 1 \quad (n=l)$$

$$= 0 \quad (n \neq l) \quad ; \text{Kronecker } \delta$$

が成り立つとき

関数系 $\{\psi[m, n](t) ; m, n; \text{整数}\}$ は正規直交系をなす。

この場合は時間関数 $v(t)$ は

$$v(t) = \sum_{m, n; \text{integer}} \langle v(t), \psi[m, n](t) \rangle \psi[m, n](t)$$

が成り立つ。

[1] Haar の Wavelet

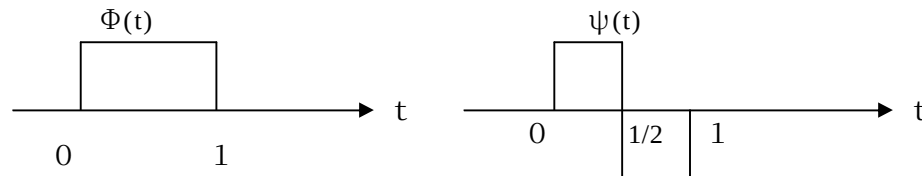
Haar の Scaling 関数

$$\Phi(t) = 1 \quad (0 < t < 1)$$

$$=0 \text{ (それ以外)}$$

Haar の Wavelet

$$\psi(t) = \Phi(2t) - \Phi(2t-1)$$



[2] Shannon の Wavelet

Shannon の Scaling 関数

$$\Phi(\omega) = 1 \quad (-\pi < \omega < \pi)$$

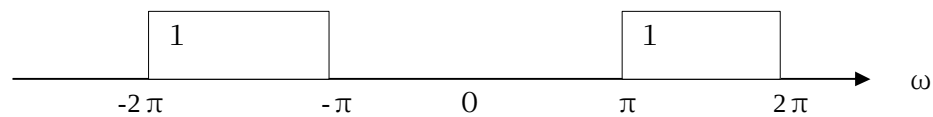
$$= 0 \quad \text{(それ以外)}$$

時間領域では

$$\phi(t) = \sin(\pi t) / \pi t$$

Shannon の Wavelet

$$\Psi(\omega) = \Phi(\omega/2) - \Phi(\omega)$$



問題

- (1) Shannon の Wavelet の時間関数を求めよ。
- (2) Shannon 及び Haar の Wavelet の正規直交性を証明せよ。

4. Haar の Wavelet による信号の分解と合成

Haar の Scaling 関数

$$\Phi(t) = 1 \quad (0 < t < 1)$$

$$= 0 \text{ (それ以外)}$$

関数空間 V_j

$$V_j = \{ [k] \sum c[j,k] \cdot \Phi(2^j \cdot (t-k)) \mid [k] \sum |c[j,k]|^2 < \infty \}$$

これは標本化周波数 2^j (samples/sec)で標本化して矩形近似した信号の集合である。

Haar の Wavelet

$$\psi(t) = \Phi(2t) - \Phi(2t-1)$$

関数空間 W_j

$$W_j = \{ [k] \sum d[j,k].\psi(2^j.(t-k)) \quad , [k] \sum d[j,k]/^2 < \infty \}$$

関数空間 V_j と W_j の関係

$$V_j \perp W_j \quad ; \text{直交する。} \leq = \text{内積} \quad (\Phi(2^j.(t-k)), \psi(2^l.(t-m)) = 0$$

$$V[j+1] = V_j + W_j$$

即ち；

$$\Phi(2t) = a[0].\Phi(t) + a[1].\psi(t) \quad ; a[0] = a[1] = 1/2$$

$$\Phi(2t-1) = b[0].\Phi(t) + b[1].\psi(t) \quad ; b[0] = 1/2, b[1] = -1/2$$

(図を描いて確認せよ)

一般に

$$\Phi(2^n.t-m) = [k] \sum \{ a[m-2k].\Phi(2^{n-1}.t-k) + b[m-2k].\psi(2^{n-1}.t-k) \}$$

$$a[i] = b[i] = 0 \quad (i \text{ は } 0,1 \text{ 以外})$$

逆の関係；

$$\Phi(t) = [k] \sum p[k].\Phi(2t-k) \quad ; p[0] = p[1] = 1$$

$$\psi(t) = [k] \sum q[k].\Phi(2t-k) \quad ; q[0] = 1, q[1] = -1$$

(図で確認)

一般に

$$\Phi(2^{n-1}.t-m) = [k] \sum p[k-2m].\Phi(2^n.t-k) \quad ; p[i] = 0 \quad (i=0,1 \text{ 以外})$$

$$\psi(2^{n-1}.t-m) = [k] \sum q[k-2m].\Phi(2^n.t-k) \quad ; q[i] = 0 \quad (i=0,1 \text{ 以外})$$

[1] 関数の分解

もとの関数 $f[n](t)$

$$f[n](t) = [m] \sum c[n,m].\Phi(2^n.t-m)$$

これは時間信号 $f(t)$ を標本化周波数 2^n (Samples/sc)で標本化して矩形近似したものに等しい。これを以下のように低次の関数に分解する。

$$\begin{aligned} f[n](t) &= f[n-1](t) + g[n-1](t) \\ &= [k] \sum c[n-1,k].\Phi(2^{n-1}.t-k) + [k] \sum d[n-1,k].\psi(2^{n-1}.t-k) \end{aligned}$$

分解公式

上の関係から

$$c[n-1,k] = [m] \sum c[n,m].a[m-2k]$$

$$d[n-1,k] = [m] \sum c[n,m].b[m-2k] \quad (\text{導出せよ})$$

[2] 関数の合成

上とは逆に

$$f[n-1](t) + g[n-1](t) \rightarrow f[n](t)$$

前述の係数を用いると

$$c[n, 2k'] = c[n-1, k'] + d[n-1, k'] \quad ;(k=2k')$$

$$c[n, 2k'+1] = c[n-1, k'] - d[n-1, k'] \quad ;(k=2k'+1)$$

(導出せよ)

[3] 関数の分解と合成

分解過程

$$\begin{aligned} f[n] &\rightarrow g[n-1] \\ &+ \\ f[n-1] &\rightarrow g[n-2] \\ &+ \\ f[n-2] &\rightarrow g[n-3] \\ &+ \\ f[n-4] \end{aligned}$$

以下同様。

合成過程

上の矢印を反転すれば合成過程になる。

$f[n](t)$ は標本化周波数 2^n の矩形近似関数であった。従って上記において分解過程では標本化周波数は半分になり(Down Sampling),逆に合成過程においては2倍になる。

5. Wavelet 変換と Sub-band coding の関係

上の Haar Wavelet を用いた分解、合成過程は以前から信号の帯域圧縮に用いられてきた Sub-band 符号化方式の一種である事が分かる。

Sub-band coding 方式は次のようなものである。

信号分解過程

今入力信号を

$$V(z) = [v(i)] \sum z^{-i} \quad (z = e^{sT})$$

とおく。

これを HPF $H(z)$ を通したものを $U(z)$, LPF $G(z)$ を通したものを $D(z)$ とする。即ち、

$$U(z) = V(z) \cdot H(z) = [u(i)] \sum z^{-i}$$

$$D(z) = V(z) \cdot G(z) = [i] \sum d(i) \cdot z^{-i}$$

また

$$H(z) + G(z) = 1$$

となるように設計すると

$$V(z) = U(z) + D(z)$$

となる。

ここで標本化定理から $V(z)$ の帯域幅は標本化周波数 $1/T$ の $1/2$ 以下であることが必要であるが、 $H(z)$, $G(z)$ の帯域幅が標本化周波数の $1/4$ であれば $U(z)$, $D(z)$ の周波数帯域幅は標本化周波数を半減することができる。即ち Down sampling を行うことができる。

前述の Haar Wavelet と同様にすれば以下の Sub-band 符号化方式となる。

LPF の出力 $D(z)$ を Down-sampling して標本化速度を半減する。Down sampling の仕方は偶数番目かあるいは奇数番目の項を選択して他方は捨てる。

偶数番目の項を選択すれば

$$D[-1](z^2) = [i] \sum d(2i) \cdot z^{-2i}$$

この半減した周期で前述の $H(z)$, $G(z)$ と全く同じ構造のフィルターを動作させるとそれぞれ $H(z^2)$, $G(z^2)$ となるがそれらの周波数帯域は原信号の標本周期の $1/8$ となる。

そこで上と同様にして

$$UD[-1](z^2) = H(z^2) \cdot D[-1](z^2)$$

$$DD[-1](z^2) = G(z^2) \cdot D[-1](z^2) \rightarrow \text{Down sampling} \rightarrow DD[-2](z^4)$$

以下同様にして

$$V(z) = U(z)$$

+

$$D(z) \rightarrow D[-1](z^2) = UD[-1](z^2)$$

+

$$DD[-1](z^2) \rightarrow DD[-2](z^4)$$

等の分解ができる。

➡は Down sampling を示し標本化速度を半減する。

通常の画像情報は信号の電力分布は低周波に集中しているので上の分解過程によって送信情報の圧縮が可能となる。

信号合成過程

受信部においては以上の分解過程の逆操作を行う。

Down sampling の逆操作は Up sampling である。

Down sampling

$$V(z) = H(z).V(z)$$

+

$$G(z).V(z) = D(z) = [i] \sum d(i) .z^{-i} = [i] \sum d(2i) .z^{-2i} + z^{-1}[i] \sum d(2i+1) .z^{-2i}$$

→(Down Sampling)

$$D[-1](z^2) = [i] \sum d(2i) .z^{-2i} \text{ (偶数番目の項のみ選択)}$$

Up sampling

$$D[-1](z^2) = [i] \sum d(2i) .z^{-2i}$$

$$\rightarrow(\text{up sampling}) = [i] \sum d(2i) .z^{-2i} + z^{-1}[i] \sum d'(2i+1) .z^{-2i}$$

$$(d'(2i+1) = 0, \text{零挿入})$$

$$= D'(z)$$

$D'(z)$ は速度は $D(z)$ と同じであるが、他方 $D'(z) = D[-1](z^2)$ であり $D(z)$ とは全く異なる。

ところが LPF $G(z)$ を通すと高調波が除去されて

$$G(z).D'(z) = D(z)$$

となり信号が再生される。

信号の分解、合成の周波数スペクトルを下図に示す。

上から下方向は分解過程、その逆方向は合成過程を示す。

問題

- (1) 上の記述では分解用 LPF, HPF は理想的に急峻なフィルター特性を持つものとして図示している。現実にはそのようなフィルターは実現不可能である。即ち実際のフィルターは有限な減衰域を持つ。歪が生じないためにはどのような周波数特性のフィルターを設計すればよいか。
- (2) 通信網においては分解過程は送信側、合成過程は受信側で行われる。信号歪を生じないためには送信側と受信側のフィルター特性はどのようなものにすれば良いか。

まとめ

Haar Wavelet は矩形波を用いるため演算量が少ない利点が多い。その代わり周波数局在性は無く、純粋に時間軸上の処理となる。Sub band 符号化は周波数局在性を駆使した処理であるが、正確な周波数特性のフィルターを設計するには演算量が大きくなる。

両者とも Down sampling と Up sampling を用いる点は共通している。通信分野で発達した Sub band 符号化と石油探査地震波解析から発展してきた Wavelet 変換法が共通の信号処理手法に到達した事は技術史的にも興味深い事であろう。

Sub-band Coding 格段の周波数スペクトル図