

通信網の設計と Traffic-Theory

2006/04/17 市吉 修

通信網のモデル

- 通信網 = 任意の点と点を結ぶ網
- MESH 構成 (交換無し); N 利用者間に $N \times N$ の回線が必要 ; 実現不可能、不経済 = >
- 交換機 (SW) により星状構成 (STAR) にすると N 本の回線で足りる。 = >
- M 個の STAR 網を結ぶと $M \times N$ の端末点を結ぶ通信網ができる。
- 階層構造の効果

階層数	交換点の数	回線の数	利用者の数
0 (交換機無し、Nesh)	0	$N \cdot N$	N
1	1	N	N
2 (M 個の網を接続)	$1 + M$	$M + M \cdot N$	$M \cdot N$
3 (L 個の二階網を接続)	$1 + L + L M$	$L + LM + LMN$	$L \cdot M \cdot N$

- 関門局 (Gateway) の効果
- 二つの通信網 (利用者数 X , Y) を一点の GW で接続すると利用者数 $X + Y$ の網が形成。
 例、 国際交換機、 I X (異なる ISP のインターネットを接続)

Poisson 分布

λ ; 単位時間当たりの呼び (Call) の発生頻度

時間 t 内に発生する呼びの平均数は $a = \lambda t$

時間 t 内に k 個の呼びが発生する確率 ;

$$P [k] (t) = (\lambda t) ^ k / k ! \cdot e ^ { (- \lambda t)}$$

特に

$$P [0] (t) = e ^ { (- \lambda t)}$$

指数分布

μ ; 接続された通話の平均持続時間長を $1 / \mu$ とする。

通話時間の分布 $h (t)$

$$h (t) = e ^ { (- \mu t)}$$

特長

$$h (t + \tau) = h (t) \cdot h (\tau) \Leftrightarrow \text{Markov 過程}$$

Poisson 分布と指数分布は通常回線交換網によく合うモデルである。

Erlang 分布

点 A と点 B をパケット交換で結ぶ。

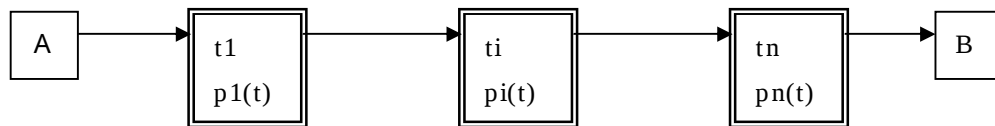
n 個のルータを経由して通信が行なわれるものとする。

各段のルータの通過にかかる時間を t_i とすると端から端まで到達するのにかかる時間 t は

$$t = t_1 + t_2 + \dots + t_n$$

となる。

格段のルータの通過にかかる時間の分布を $p_i(t)$ とする。



端から端までの伝達時間の分布密度関数を $q(t)$ とする。

$q(t)$ のラプラス変換を $Q(s)$ とする。

$$Q(s) = \int_{0, \infty} q(t) \cdot e^{-st} dt$$

同様に各段のルータの分布密度関数 $p_i(t)$ のラプラス変換を $P_i(s)$ と表す。

次の式が成り立つ事を示せ。

$$(1) \quad Q(s) = P_1(s) \cdot P_2(s) \cdot \dots \cdot P_n(s)$$

解

まず $n=2$ の場合を計算する。

確率密度関数 $p_1(t)$ のラプラス変換 $P_1(s)$ は $P_1(s) = \int_{t=0, \infty} p_1(t) \cdot e^{-st} dt$ で定義される。同様に第二のルータについても $P_2(s)$ が定義される。

今第一および第二のルータをまとめて一つの合成ルータと見なすとその遅延 t は

$t = t_1 + t_2$ となる。合成ルータの遅延 t の確率密度関数を $q(t)$, そのラプラス変換を $Q(s)$ とする。

すると $q(t) = \int_{t_1, t_2=0, \infty} p_1(t_1) \cdot p_2(t-t_1) dt_1$ となる ($t_2 = t - t_1$ となることに注意)。

これは $p_1(t)$ と $p_2(t)$ の畳み込み積分であるからそのラプラス変換は $Q(s) = P_1(s) \cdot P_2(s)$ となる。

これは一個の合成ルータの特性であるから以下同様の論法により式(1)が成り立つ。

今各段のルータの遅延特性がみな指数分布をしており、格段の通過遅延が平均 $1/\mu$ であるとする。すると点 A から B に到るパケットの平均遅延が n/μ となるのは明らかであるが

(2) 点 A から B のパケットの伝達時間の分布密度が次ぎの Erlang 分布で与えられる事を示せ。

$$q(t) = \mu \cdot (\mu t)^{n-1} / (n-1)! \cdot e^{-(\mu t)}$$

解

各段の分布は $p(t) = \mu e^{-(\mu t)}$ とするとそのラプラス変換は $P(s) = \mu / (\mu + s)$ となる。全体 n 段の合成ルータの遅延特性は上述の式(1)より $Q(s) = P(s)^n = \mu^n / (\mu + s)^n$ となる。そのラプラス逆変換をとると $q(t) = \text{Res} (Q(s) \cdot e^{st})$ で与えられるが (Res ; 留数)、

$$Q(s) \cdot e^{st} = \mu^n / (\mu + s)^n \cdot e^{st} = \mu^n / (\mu + s)^n \cdot e^{(\mu + s) t} \cdot e^{-(\mu + s) t}$$

と変形して留数計算を行うと式(2)が得られる。

(3) Erlang 分布の平均を求めよ。

$$\langle t \rangle = \int_0^\infty q(t) \cdot t dt = n/\mu$$

(4) Erlang 分布の分散 σ を計算せよ。

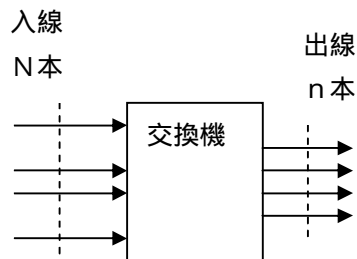
$$\text{但し } \sigma^2 = \langle (t - \langle t \rangle)^2 \rangle = n/\mu^2$$

$$\sigma = \sqrt{n}/\mu$$

(5) $n = 1$ の場合と n が非常に大きい場合の分布の傾向を調べよ。

$$\sigma / \langle t \rangle = \sqrt{n}/\mu / (n/\mu) = 1/\sqrt{n}$$

$n=1$ の場合はこれは 1 であるが n が大きくなるにつれて値が小さくなる。即ち分布が鋭くなり、平均の周りに確率分布密度が集中する。



- (1) 内部閉塞 (回線は空いているのに内部状態のために接続できない事) は無いものとする。
- (2) 即時式と待時式の二種類がある。
 - 即時式 ; 呼び入力時に出線がすべて使用中であれば接続は即時拒否される。
 - 待時式 ; 呼び入力時に出線がすべて使用中であっても持ち行列 (Queue) にいれて出線が空くのを待つ。Queue Buffer が満杯の場合は接続が拒否される。
- (3) 通信品質 (QoS) の評価方法
 - 呼損率 (Loss Probability , Grade-of-Service)
 - 待ち合わせ時間 (Waiting-Time)

ケンドールの記号 (Kendall's notation)

$X / Y / n (m)$

X ; 呼びの生起分布

Y ; 保留時間の分布

n ; 回線数

m ; 許容待ち合わせ数 (即時式の場合は 0)

X , Y に入る記号

M ; Poisson 分布、指数分布

D ; 一定分布

E_k ; 位相 k の Erlang 分布

G ; 一般分布

Poisson の同時接続分布

仮定

- (1) 入線の数 $N \gg 1$
- (2) 呼びの発生は最単純流 (定常性、独立性、希少性)
- (3) 入力に加えられた Traffic ; a (Erlang)
- (4) 出線の数 ; n
- (5) 保留時間分布は平均保留時間 t_0 の指数分布

< n 本の出線の内 x 本が使用中の確率 $P(x)$ >

$$P(x) = a^x / x! / \{ \sum_{i=0, n} a^i / i! \}$$

$n \rightarrow \infty$ ならば

$$P(x) \Rightarrow a^x / x! \cdot e^{-a}$$

即時式交換機の特性

< 個損率 B_c >

単位時間に運ばれる呼量 a_c は

$$a_c = \sum_{x=0, n} x P(x) = a \{ 1 - P(n) \}$$

呼損率 B_c は

$$B_c = 1 - a_c / a = P(n)$$

待時式交換機の特性

< 待ち合わせ確率 M_0 >

仮定 ; 入力 Buffer は十分大。

$$\begin{aligned} M_0 &= \sum_{x=n, \infty} P(x) \\ &= a^n / n! \cdot (n / (n - a)) / \\ &\quad \{ \sum_{x=0, n-1} a^x / x! + a^n / n! \cdot (n / (n - a)) \} \end{aligned}$$

< 待ち合わせ時間が t 以上になる確率 >

$$M(> t) = M_0 \cdot e^{-\{(n - a) t / t_0\}}$$

< 平均待ち合わせ時間 >

$$W = M_0 \cdot t_0 / (n - a)$$

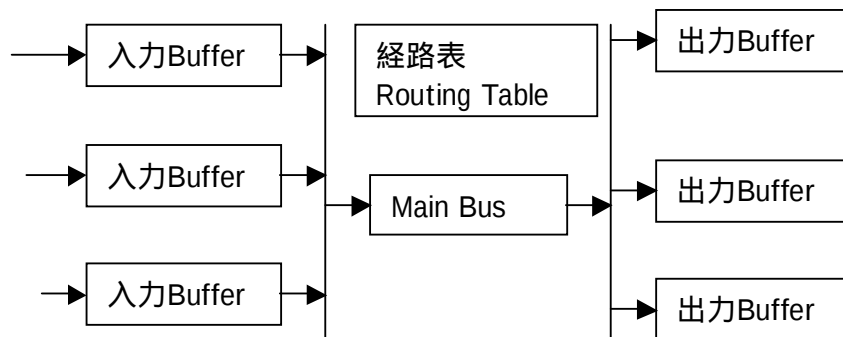
M / D / 1 待ち行列の特性

2003/9/17

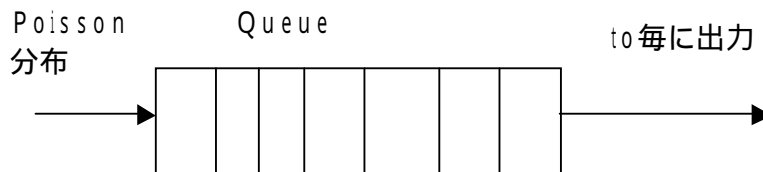
インターネットを流れるパケットは殆どが約 1.5KB の長さのパケットである (LAN の最大パケット長)。すべてのパケット長が一定と単純化してあるルータでそれ进行处理する場合の待ち行列の簡単な解析を行なう。

< ルータの構成とモデル >

ルータの構成は基本的に下図のようになる。



ルータの構造



ルータのモデル

時間 t_0 毎に待ち行列の先頭のパケットが出力される。

< 入力分布 >

時間 t_0 に入力されるパケットの数は Poisson 分布に従うものとする。

k 個のパケットが入力される確率 $P[k]$ は

$$P[k] = a^k / k! \cdot e^{-a}$$

但し

$$a = \lambda t_0$$

λ ; 単位時間に発生する入力パケットの数

< 状態の定義 >

$S[m]$; m 個のパケットが入力 Buffer に存在する状態、その確率。

< 状態遷移図 >

今有る時刻の状態が $S[m]$ であるとする。時間 t_0 後の状態を $S'[m]$ と表すと、

$$S'[m] = P[0].S[m+1] + P[1].S[m] + P[2].S[m-1] - P[0].S[m] - P[2].S[m]$$

変化分は

$$S'[m] - S[m] = P[0].S[m+1] + \{P[1] - P[0] - P[2] - 1\}.S[m] + P[2].S[m-1]$$

< 平衡状態 >

$$S'[m] - S[m] = 0$$

< 待ち行列の平衡状態分布 >

$$S[m] = (1-x).x^m$$

但し x は特性方程式の根である。

$$x^2 - (e^a - a + 1 + a^2/2)x + a^2/2 = 0$$

$a \ll 1$ の時 x は大体

$$x \approx a^2/2$$

< パケット廃棄の確率 >

上の解析においてはルータには無限長のバッファがあると仮定しているが現実には有限な値 M に限られる。バッファオーバーフローが起こるとあふれたパケットは廃棄される。その廃棄確率を P_e とすると

$$P_e = \sum_{m=M+1, \infty} S[m] = (1-x) \cdot x^M \cdot \sum_{m=M+1, \infty} x^m = x^{M+1}$$

となる。

(1) ルータで生ずる遅延分布を求めよ。

各パケットの処理と伝送に一定時間 t_0 がかかるとすると $m.t_0$ 遅延の確率分布密度は

$$P_d(m.t_0) = S[m] \quad (m=0,1,2,\dots,M)$$

(2) ルータで生ずる平均遅延を求めよ。

$$\langle t \rangle = t_0, \langle m \rangle = t_0 \cdot \sum_{m=0, \infty} S[m] = t_0 \cdot x/(1-x)$$

(3) $a = 1$ に近い場合の動作を解析せよ。

$a=1$ のときは回線が 100% 使用される。 $S[0] = 1-x$ はバッファに待っているパケットが一つも無い確率であるからこれは 0 に近くなる。即ち x は 1 に近くなる。すると上述の(2)よりルータで生じる平均遅延は無限に大きくなる。実際には大半が廃棄されてルータの動作がつぶれてしまう。