

## 符号化変調(TCM)概論

2007/10/10 市吉 修

### 1. 誤り訂正の原理

ブロック長  $n$  語(words)、情報語数  $k$ 、誤り訂正可能な語数  $t$  の符号を  $(n,k,t)$  で表す。  
 例えば Galois 体  $GF(2^m)$  で定義される(一語は  $m$  ビット)Reed-Solomon 符号は  $(n,n-2t,t)$  である。すなわち  $n=k+2t$  であり情報  $k$  語がそれより大きい数の  $n$  語に拡張されている。  
 ブロック符号の原理は  $k$  次元の空間を  $n$  次元に拡張することにより符号間に距離を導入することである。符号間の最小距離が  $2t+1$  であればブロック中  $t$  語までの誤りが訂正可能である。

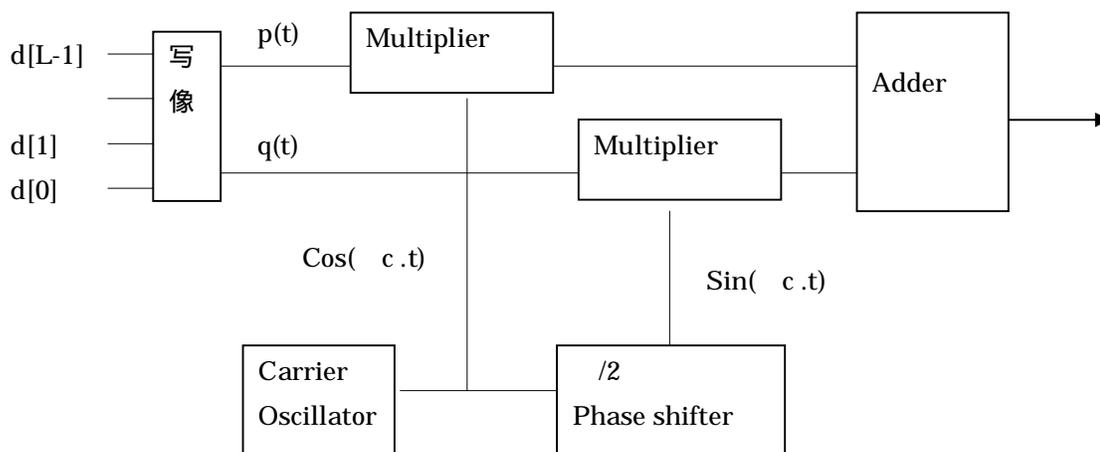
畳み込み符号の場合は空間の拡張は拘束長  $K$  に対応する  $2^K$  個の状態と考えることができる。 $K=0$  とは何も符号化を行わない場合であり、状態の数は 1、拘束長は 0 であるから伝送データ系列の各データは独立である。拘束長が有限な  $K$  である場合には伝送データの入力に対して  $2^K$  の各状態は符号化方式で定まる符号を出力すると共に所定の状態に遷移する。即ち符号化は  $2^K$  個の有限状態機械の動作となる。

復号は受信符号から符号器の状態遷移を推定する。代表的な方法が Viterbi 復号法である。これは受信符号系列に最も近い符号系列を発生する状態遷移、即ち経路(Path)を推定する。Viterbi 復号法が大幅に特性を改善したのは Soft decision により Hamming 距離に代えて Euclid 距離を採用した時であった。同じ符号化で一挙に 3dB の改善がえられたのである。このように畳み込み符号は変調と一体化して考えると大きな効果が得られる。

### 2. 変調

変調とは伝送情報を複素平面に写像することである。

#### 直行振幅変調(QAM)



複素平面への写像

一般に変調データは L 値の二進データである。L=1,2,3,4,6 の時はそれぞれ BPSK, QPSK, 8PSK, 16QAM, 64QAM などが用いられる。

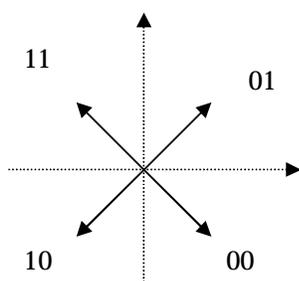
変調データの如何に関わらず、変調回路は直交振幅変調 (Quadrature Amplitude Modulation, QAM) が用いられる。上の回路の出力は

$$s(t) = p \cdot \cos(\omega_c t) - q \cdot \sin(\omega_c t) \\ = \text{Re}\{ (p + iq) \cdot e^{i\omega_c t} \}$$

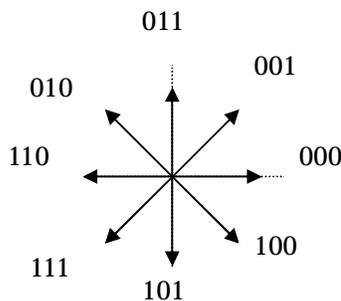
となり複素信号処理と考えると一元的に把握される。即ち変調とは変調信号  $p+iq$  と搬送波  $e^{i\omega_c t}$  の乗算を行うことである。

写像 (Mapping)

誤り訂正を行わない場合には Gray code への写像が行われる。復調において誤りが生じるのは近接の写像点の間で起こるので隣接符号が 1 ビットだけ異なるように写像する。



Gray code for QPSK



Gray code for 8PSK

3. 組織的畳み込み符号

符号化後にもとの情報データ系列を含むものを組織的符号化 (Systematic coding) と呼ぶ。

ブロック符号は通常組織的符号化が行われる。

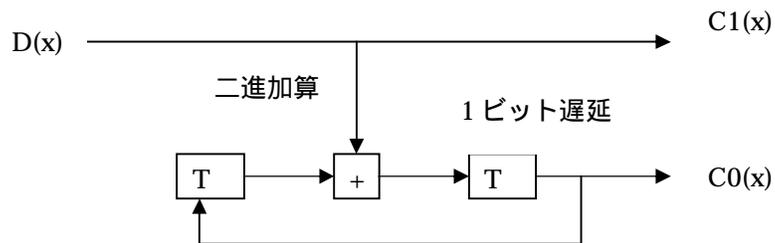
畳み込み符号化は非組織的符号化 (non-systematic coding) が行われる場合が多い。即ち情報データ系列を  $D(x) = d(0) + d(1) \cdot x + d(2) \cdot x^2 + \dots + d(n) \cdot x^n + \dots$  と表すと符号化出力は二つの K 次の生成多項式  $G_0(x)$ ,  $G_1(x)$  によりに系列の符号が出力される。

$$C_0(x) = G_0(x) \cdot D(x), \quad C_1(x) = G_1(x) \cdot D(x) \text{ 。$$

符号化変調の準備として次の組織的畳み込み符号を考える。

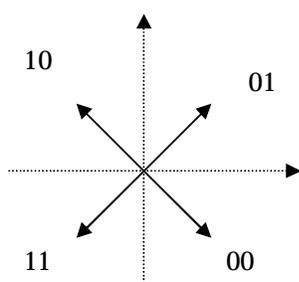
$$C_1(x) = D(x), \quad C_0(x) \cdot (1 - x^2) = x \cdot D(x)$$

具体的な構成を次図に示す。

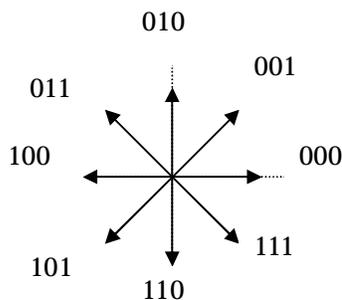


Systematic Convolutional coder

また複素平面への写像は Gray code ではなく次の自然二進(natural binary coding)写像を用いる。



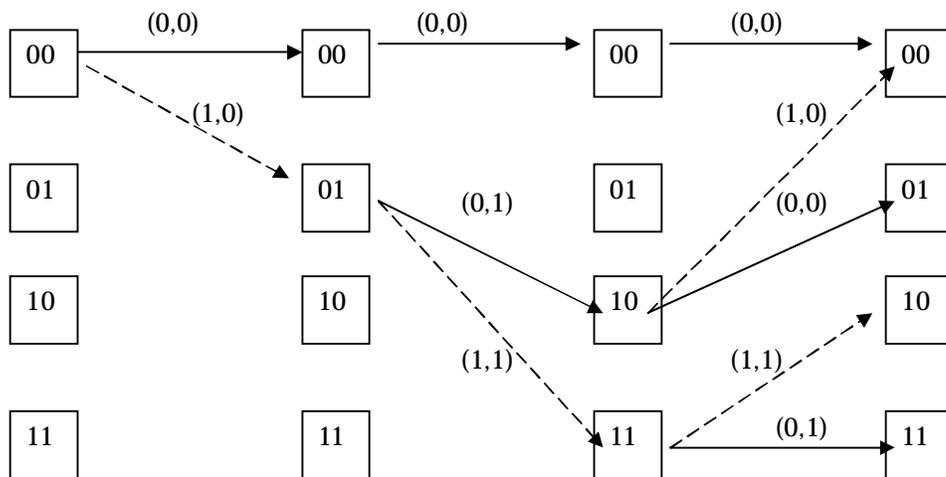
Natural Binary coding for QPSK



Natural Binary coding for QPSK

上の符号化データの状態遷移と出力を下図に示す。この図を Trellis Diagram と言う。

状態 S



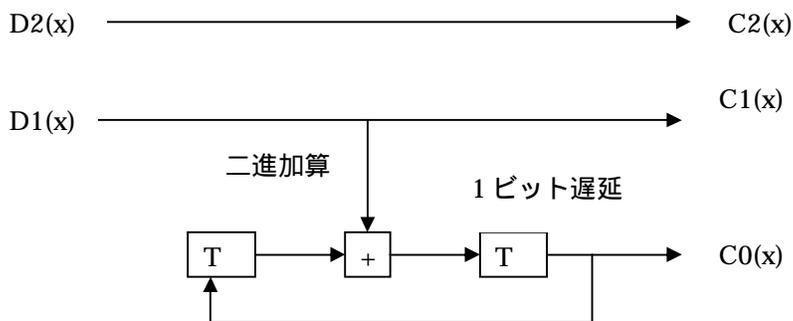
上の Trellis 図において実線は情報データが 0,点線は 1 の場合の遷移を示す。

状態遷移図からつぎのことが分かる。

- (1) 初期状態  $S(0,0)$  で入力データが  $0,0,0$  の場合には経路は  $S(00)$  で出力符号も  $(0,0)$  である。これを基準経路とする。
- (2)  $S(0,0)$  で伝送データ 1 が入力されると状態が  $S(01)$  に遷移し最も早く基準経路に合流するのは  $S(00) \rightarrow S(01) \rightarrow S(10) \rightarrow S(00)$  であり上の経路に伴う出力符号は  $(1,0), (0,1), (1,0)$  である。
- (3) 基準経路と分岐合流最短経路の距離は Hamming 距離では 3 である。
- (4) Euclid 距離では QPSK の変調点  $00$  と  $01$  間の Euclid 距離を  $d_0$ , 変調点  $00$  と  $10$  の距離を  $d_1$  とすると  $d_1 = \sqrt{2} \cdot d_0$  である。
- (5) そこで上の最短経路と基準経路の Euclid 距離を  $d_m$  とすると  $d_m^2 = d_1^2 + d_0^2 = 2d_0^2 + d_0^2 = 3d_0^2 = 1.5d_1^2$
- (6) 誤り訂正を行わない場合には BPSK を用いて符号間距離は  $d_1$  である。上の組織的畳み込み符号によって電力換算で 2.5 倍に距離が拡大された。即ち約 4dB の符号化利得が得られる。

#### 4. 符号化変調 8PSK

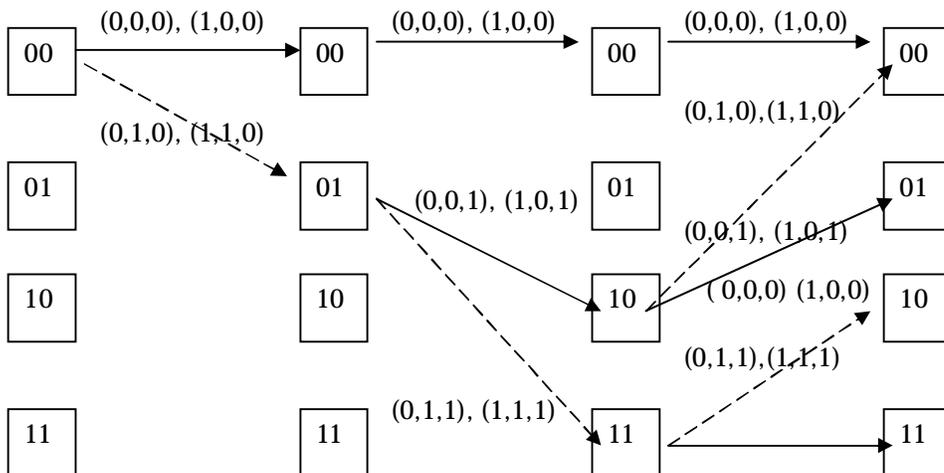
下図のように独立な伝送データを二本送信する場合を考える。



Systematic Convolutional coder

符号化出力は前述の自然二進数値 ( $C_2, C_1, C_0$ ) により 8PSK の変調点に対応させる。

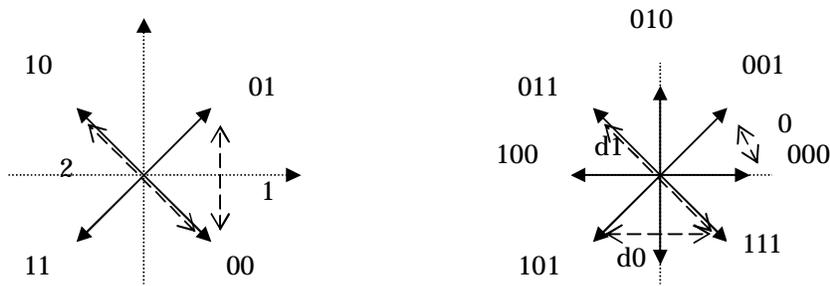
入力データが二本であるから状態の分岐は 4 枝となるが符号化は前述と同じなので Trellis 図も前と同じ構造である。



Trellis Diagram for 8PSK TCM

変調点間の Euclid 距離はした図において各ベクトルの大きさを  $a$  とすると

$$d_{10} = 2a, \quad d_{01} = \sqrt{2} \cdot a, \quad d_{00} = 2a \cdot \sin(\pi/8) = 0.765a$$



上の Trellis 図によって 8PSK TCM の最小距離  $d_m$  を求めると

$$d_m^2 = d_{10}^2 + d_{00}^2 + d_{01}^2 = 4.6a^2$$

$$d_m = 2.14a$$

となる。これは  $2$  にほぼ等しい。

即ち BPSK と同じ最小距離で独立に 2 ビットを伝送できる。しかも変調速度は BPSK とおなじなので帯域幅もおなじである。即ち BPSK と同じ送信電力及び周波数帯域幅の回線を用いて 2 倍の情報伝送を同等の誤り率特性で行う事が可能である。

### まとめ

畳み込み符号の符号間距離(自由距離, free distance とも言う)は拘束長  $K$  に渡る  $2^K$  個の状態間の遷移で構成される経路(path)の分岐として実現される。状態の数は有限なので経路は必ず合流するが、分岐から合流に到る最短経路間の Euclid 距離が誤り率特性をほぼ決定する。信号空間の拡張は拘束長  $K$  による  $2^K$  の状態の設定と考えられるので、拘束長  $K$  を大きくすれば符号間距離は大きくなるけれども信号処理量が  $2^K$  に比例して増大する。

変調は複素平面への写像である。複素平面は二次元であり、それ以上空間の拡張はできないが、複数の伝送データを二進数値と考えて上の桁のデータにより Euclid 距離の大きい変調を行い、下の桁のデータは複素平面上では符号間距離が小さくなるが、時間軸方向に畳み込み符号化により符号間距離を拡大すれば誤り率特性の劣化を抑制した多値データ伝送が可能となる。これは変調と誤り訂正符号化を一体化した設計であるので符号化変調と呼ぶ。また畳み込み符号の状態遷移(Trellis)との関連から Trellis Code Modulation (TCM)とも呼ばれる。

上の手法は更に 16QAM や 64QAM 等の多値 QAM 変調にも適用できる。

### 関連文献

自主問学会 <http://www5e.biglobe.ne.jp/~kaorin57/SelfStudySociety.htm>

[1] 誤り訂正(1) 最尤度復号法の原理、畳み込み符号及びターボ符号の概要

[MaximumLikelihoodDecoderPrinciple.pdf](#)

[2] 誤り訂正(2) ブロック符号

[BlockCodes.pdf](#)

[3] Digital 変復調の基礎

[BasicDigitalMODEM.pdf](#)