

四元 vector 論

Quaternion Vector theory

市吉 修

2020/12/11

1. 複素数

実数 x, y に対して以下により複素数が定義される。

$$z = x + iy \quad \text{但し } i \cdot i = i^2 = -1 \quad i; \text{ 虚数 (imaginary number)}$$

複素数は二次元平面で定義されており $z = (x, y)$ と表記する。

その次元を高次元に拡張する事はできないであろうか。

2. 四元数

実数 a, b, c, d に対して以下の四元数が定義される。

$$z = a + ib + jc + kd = (a, b, c, d)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k$$

$$j \cdot k = -k \cdot j = i$$

$$k \cdot i = -i \cdot k = j$$

四元数 z, u, w に対して

$$z \cdot u \neq u \cdot z \quad \text{交換律を満たさず}$$

$$(z \cdot u) \cdot w = z \cdot (u \cdot w) = z \cdot u \cdot w \quad \text{結合律を満たす}$$

$$z \cdot (u + w) = z \cdot u + z \cdot w \quad \text{分配律を満たす}$$

四元数とは結合律と分配律は満たすが交換律を満たさない代数系である。

四元数の主たる応用は空間における **vector** の回転の計算にある。実際上述の四元数の演算規則は三次元空間のベクトルの内積と外積に類似している。そこで四元数の演算をすべて **vector** で扱う事を考えて見よう。

3. 四元 vector

3.1. 定義

三次元 **vector** 空間の座標単位ベクトル i, j, k に対して各々方向余弦 l, m, n を持つ単位 **vector** e を以下により定義する。

$$e = li + mj + nk$$

$$e \cdot e = l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (\text{ベクトル内積})$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad (\text{ベクトル内積})$$

$$i \times j = -j \times i = k \quad (\text{ベクトル外積})$$

$$j \times k = -k \times j = i \quad (\text{ベクトル外積})$$

$$k \times i = -i \times k = j \quad (\text{ベクトル外積})$$

更に実数 a, b に対して四元 vector を次式により定義する。

$$[z] = a + b.e = (a, b.l, b.m, b.n)$$

また四元 vector の演算として次の乗算(x)を定義する。

任意の vector u, v に対して

$$u(x)v = uxv - u.v$$

(外積) (内積)

演算(x)は被演算項の何れかが scalar 値である場合に対しては通常の乗算となるが共に vector なる場合に対しては上のような特殊な演算となるのでこれを四元 vector 乗算と呼ぶ事にする。

この定義により

$$e(x)e = -1$$

となる。ここで単位ベクトル e を軸ベクトル(axis vector)と呼ぶ事にする。

Vector 空間における乗算として(x)を元にすればベクトルの内積と外積は次のように定義する事もできる。

$$u.v = - \{ u(x)v + v(x)u \} / 2 \quad (\text{内積})$$

$$uxv = \{ u(x)v - v(x)u \} / 2 \quad (\text{外積})$$

$[z] = a + b.e$ は複素数を四次元空間に拡張したもの或いは四元数の vector 的表現とも考えられる。この意味で 四元 vector (Quaternion vector)と呼び $[z]$ または単純に z と表記する事にする。

3.2 四元 vector 共役

四元ベクトル $[z] = a + b.e$ の共役(conjugate)を

$$[z]^* = a - b.e$$

と定義すると

$$\begin{aligned} [z] (x) [z]^* &= (a + be) (x) (a - be) \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |[z]|^2 \end{aligned}$$

となる。ここで $|[z]|$ は $[z]$ の絶対値、または大きさである。

上の四元ベクトルについて

$[z] = a + be$ の a を scalar 部、 be を vector 部と定義すると

$$a = \{ [z] + [z]^* \} / 2 = Sc[z] \quad ; \text{スカラー部 (scalar part)}$$

$$b = \{ [z] - [z]^* \} / (2e) = Vc[z] \quad ; \text{ベクトル部 (vector part)}$$

ここで $1/e = -e$ である。何故なら $(1/e) (x) e = 1$ 。

3.3. 異なる軸 vector を有する四元 vector の演算

異なる軸 vector e, f に対する四元 vector $[z], [w]$ を

$$[z] = a + be$$

$$[w] = c + df$$

とすると

$$[z](x)[w] \neq [w](x)[z] \quad ; \text{交換律を満たさず}$$

但し $e=f$ の場合には交換律を満たす。

共役演算については異なる軸ベクトル e, f についても一般に次式が成り立つ。

$$\{[z](x)[w]\}^* = [w]^*(x)[z]^*$$

更に絶対値に関しては異なる軸 vector の四元 vector についても一般に次の関係が成り立つ。

$$|z(x)w| = |z| \cdot |w|$$

4. 四元 vector の応用

三次元空間において任意の vector $\mathbf{r}$ を方向余弦ベクトル $\mathbf{e} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k} = (l, m, n)$ を軸(axis)としてその周りに角 θ だけ回転させて vector $\mathbf{r}'$ を得たとすると

$$\mathbf{r}' = \{ \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot \mathbf{e} \} (x) \mathbf{r} (x) \{ \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot \mathbf{e} \}^*$$

となる。これは直接計算により

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) + \{ \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{e} \} \times \{ \mathbf{r} - \mathbf{e}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \}$$

(回転軸成分) (回転軸に直交する部分ベクトルを角 θ だけ回転する成分)

となる事により確認できる。

5. 四元 vector の性質

上述のように四元ベクトル演算により三次元空間のベクトルの回転を簡潔に定式化できる。それは二次元平面におけるベクトルの回転を複素数により表現する方法の拡張と見る事ができる。

更に四元ベクトルと複素数には次の様に著しい類似性がある。

複素数の極座標表示

任意の複素数 $z = x + iy = (x, y)$ に対して

$$x = r \cdot \cos \Phi$$

$$y = r \cdot \sin \Phi$$

とすると

$$z = r \cdot (\cos \Phi + i \cdot \sin(\Phi))$$

$$= r \cdot e^{i\Phi}$$

但し下記オイラーの公式を用いた。

$$e^{i\Phi} = \cos(\Phi) + i \sin(\Phi)$$

複素数 z に複素数 $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ を乗ずると

$$z \cdot e^{i\theta} = r \cdot e^{i(\theta + \Phi)}$$

即ち角 θ の回転が実行されるのは明らかである。

以上の複素数に類似の定式化が四元ベクトルについても可能である。

$$[T] = \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{e}$$

これを θ で微分すると

$$\begin{aligned} [d/d\theta][T] &= -\sin(\theta) + \cos(\theta) \cdot \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e} \cdot [T] \end{aligned}$$

これから形式的に

$$[T] = e^{(\mathbf{e}\theta)} = \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{e}$$

この定義により共通の単位 **vector** の四元数的 **vector** 演算は回転角の加算となるのは明らかである。

$$e^{(\mathbf{e}\theta)} \cdot e^{(\mathbf{e}\Phi)} = e^{(\mathbf{e}(\theta+\Phi))}$$

まとめ

軸 $\mathbf{e}$ を有する四元ベクトル $[z] = a + b\mathbf{e} = (a, b)$, $[w] = c + d\mathbf{e} = (c, d)$ に対して和差積商の四則演算形式は複素数と全く同様である。従って複素関数論がそのまま四元ベクトルにも応用できる。この意味で四元ベクトルは複素数の四次元空間への拡張になっていると言えよう。任意の空間におけるベクトルを虚軸とする複素関数論の物理的意味が何であるかは興味あるところである。またオイラーの公式が虚数の指数関数を定義する事に習って本論ではベクトルの指数関数を定義し、空間におけるベクトルの回転演算の意味を明確にした。

また異なる単位 **vector** を持つ四元ベクトルについて前述の如く共役及び絶対値の乗算規則が成り立つ事は空間におけるベクトルを異なる軸の周りに複数回回転して得られる結果はある一つの軸の周りのある角度の一個の回転に等価な事を示している。