STF 交流会

2024/6/29
大井町きゅりあんにて
市吉　修

現代情報通信技術の起源

情報通信技術の進歩

1948 ベル研究所紀要(Bell System Technical Journal)

<> トランジスタの発明

<> C.E.Shanon の通信の数学的理論

<> 集積回路(IC)の発明と集積度の天文学的増大

<> 電卓開発競争から生まれたマイコン(micro computer)

<> マイコンから生まれたパソコン

<> 通信網は電話網(回線交換)からデータ通信網(packet 交換)へ

<> 異なるデータ通信網を相互に結ぶ通信網としての Internet の発展

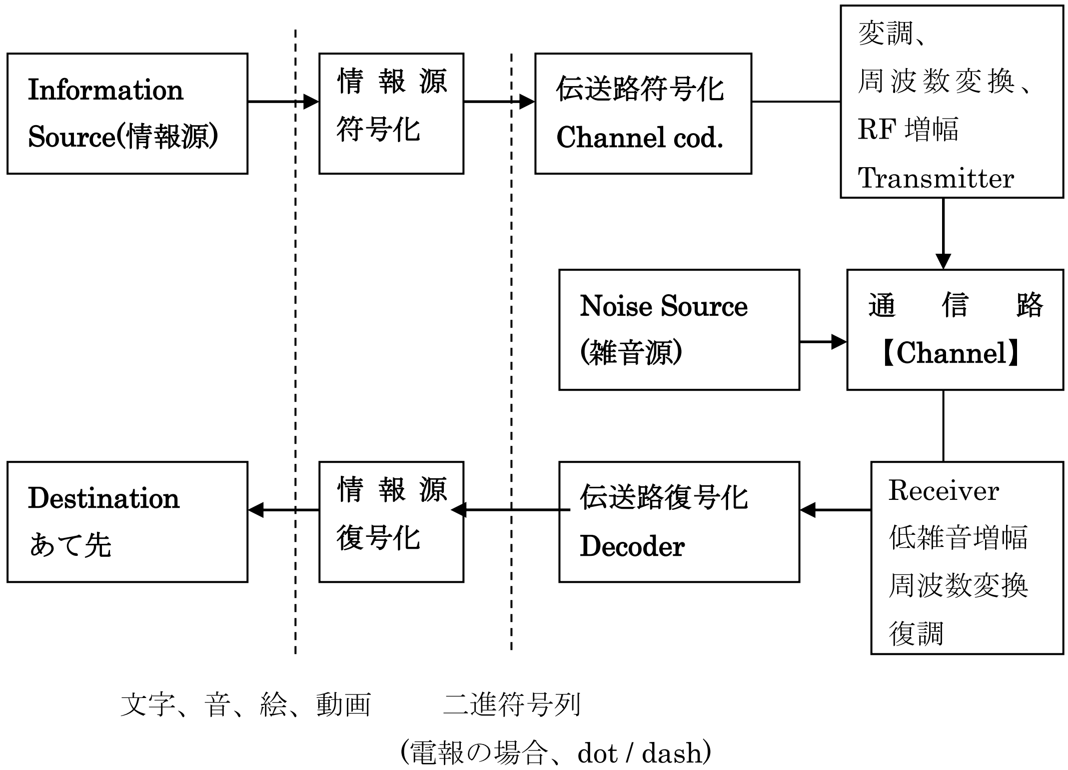
<> 今後の発展

情報理論、Claude E. Shannon 再読

Information theory, a revisit to the work of C. E. Shannon

http://www5e.biglobe.ne.jp/~kaorin57/InformationTheoryRevisitCEShannon.pdf

1.　通信回線



<u>情報通信回線の一般構成</u>

2　情報量と情報エントロピー　Information Quantity and Entropy

<u>情報源,Information source</u>

符号(文字)の集合　　　　　　　{　Li　；i ＝1，２,,,,　n　}

符号 Li の生起確率；　　　　　　Pi

当然　　　　　　　　　　　　　［ i ］ΣPi　＝　1

<u>情報量の定義</u>

ある通報(文)S の運ぶ情報量 I(S)の定義

$$I(S) = \mathrm{Log}(1 / P(S)) = -\mathrm{Log}(P(S))$$

P(S)；通報 S の出現**確率**

これは通報の「意味」は全く捨象して**事象の生起確率のみで定義**される抽象的な定義である。

$P(S) = 1 \rightarrow I(S) = 0$

$P(S) > P(T) \rightarrow I(S) < I(T)$

即ち**意外性の高い通報ほど情報量が大**である事は直感的にも合理的である。

<u>情報量の単位</u>

上の**対数の底は通常 2** に取る。

P(S) = 1/2 なる通報の運ぶ情報量は　I(S) = -Log(P(S)) = 1.0 (bit)　　Bit;　Binary Unit

対数の底を自然対数に取ることもできる。この場合の単位を Nat; Natural Unit と呼ぶ。

例　　P(S) = 1/4 なら　　I(S) = 2 (bits)　＝1.39 (nats)

　　　P(S) = 1/3 なら　　I(S) = 1.6 (bits)　= 1.10 (nats)

<u>長さＮ文字から成る通報(文) S の運ぶ情報量</u>

N が非常に大きい場合にはその文の中に含まれる各文字 Li の数は典型的に N .Pi　(i = 1,2,,,n)

そうでない非典型的な文の出現確率は N が大きくなると急速に小さくなるので無視できる。

上の典型的な文の数 M(N)は

$$M(N) = N! \;/\; \{ (N.P1)!\,.(N.P2)!\,\ldots\,(N.Pn)! \}$$

これらの文は等確率で生起するので、通報 S の運ぶ情報量 I(S)は　近似 Log(N!) (=) N.Log(N) – N (Sterling の公式)を用いて

$$I(S) = \mathrm{Log}(1 / M(N)) = N.H$$

ここで

$$H = - [i=1,n]\Sigma\ Pi\ .Log(Pi)$$

これは次のように情報量の性質にかなっている。

(1) ある文の伝える情報量はその文の長さに比例する。

(2) H は上の定義式から分かるように一文字当たりの平均情報量と解釈できる。
N 文字から成る文の運ぶ情報量が N .H で与えられる。

情報源の Entropy

上の H は情報源から生起する符号が運ぶ平均情報量である。

$$H = - [i=1,n]\Sigma Pi\ .Log(Pi) \qquad [i=1,n]\Sigma Pi = 1$$

Shannon は上の H を**情報エントロピー**と名づけた。

情報 Entropy の性質；

$$H[P1, P2,,,,Pn] = 平均<log(1/Pi)> = [i]\ \Sigma Pi\ .Log(1/Pi)$$

(1)　Ｈ＝０となるのはＰｉ＝１,　Ｐｊ＝０（ｊ=/=ｉ）の場合のみ

(2)　Ｈが最大になるのはすべての符号の生起確率が等しくなる場合

同時確率　Simultaneous Probability

Two probabilistic variables；　x, y

$$P(i, j) = Probabilliy\ \{ x = i, y = j \} = P(i)\ .\ Pi(j) = P(j).Pj(i)$$

Pi(j)　;　条件付確率(Conditional Probability)　；x = i なる条件の下で y = j となる確率。

$$P(i) = [j]\Sigma\ P(i,j) = [j]\Sigma P(j)\ .Pj(i)$$

独立事象 Statistical Independence

x と y が独立な確率変数であれば

$$P(i, j) = P(i)\ .\ P(j) \qquad Pi(j) = P(j)$$

同時確率分布の各種情報 Entropy;

$$H(x) = - [i,j]\Sigma P(i,j)\ .\ log(P(i))$$

$$Hx(y) = -[i, j]\Sigma P(i, j).\ log(Pi(j))$$

$$H(x, y) = -[i, j]\Sigma P(i, j).\ log(P(i, j))$$

この時

$$H(x, y) = H(x) + H_x(y)$$

$$= H(y) + H_y(x)$$

また

$$H(x, y) \leq H(x) + H(y)$$

$$H(y) \geq H_x(y)$$

上の不等式が等式になるのは確率変数 x と y が独立な場合だけ。

この不等式は右辺が確率変数 x からの予備知識の上に、左辺は何ら予備知識無しに確率変数 y が運ぶ平均情報であると解釈される。

3 情報源符号化　Information Source Coding

情報源 S

　　Symbols; $\{S_i \;;\; i=1,2,,,,n\}$

　　Associated Probabilities;　$\{P_i \;;\; [i=1,n]\,\Sigma P_i = 1\}$

各符号 Si を二進符号に変換する。

情報源符号化の目的; **生起確率の大きな情報源符号には短い伝送符号を割り当て**ることによって情報の伝送効率をできるだけ大きくすること。

Shannon の符号化法　Shannon’s Source Coding Method

符号の順番を生起確率の大きい順番に並べる。

　　$P1>=P2>=,,,,>=Pn$

積算確率 Accumulated Probability AP(j)

　　$AP(i) = [j=1, i-1]\,\Sigma P_j$

そこで次の方法によって i 番目の符号 Si は**長さ** li (bits)の符号を割り当てる。

(1) li の決定　;　$\mathrm{Log}(1/P_i) =< l_i < \mathrm{Log}(1/P_i) +1$

即ち　$2^{-l_i} =< P_i < 2 \cdot 2^{-l_i}$

(2)符号の割り当て法

　　AP(i)の二進数展開の小数点下 li ビットを Si の伝送符号とする

上の方法で Comma-free 符号が生成できる事は二進展開で Pi=0.0,,01xyz,,の形をしており最初の 1 が li 桁にあるので AP(i)はそれ以外の符号とは少なくとも li 番目のビットが異なる事と AP(1)=0.000,,,,から AP(n)=0.11111,,,まで AP(i)は i について単調増加関数である事から Binary tree の leaves に符号が割り当てられることから分かる。

Shannon の符号化法の性能　Efficiency of Shannon’s Source Coding Method

上の(1)に Pi をかけて i について総和を取る(平均を計算)と

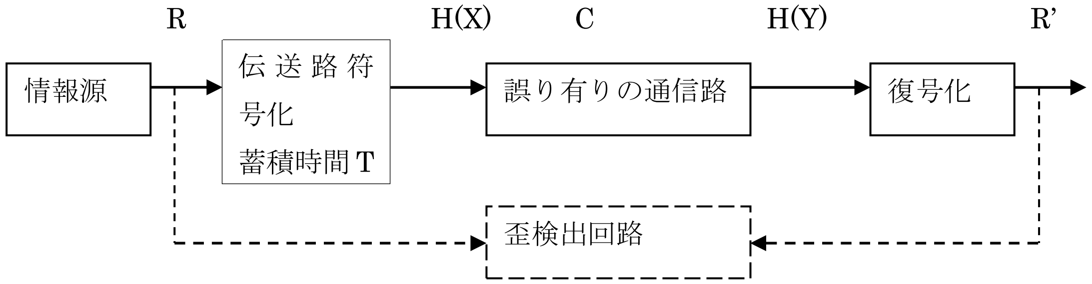
　　$[i=1,n]\,\Sigma P_i \cdot \mathrm{Log}(1/P_i) =< [i=1,n]\,\Sigma P_i \cdot l_i < [i=1,n]\,\Sigma\{P_i \cdot \mathrm{Log}(1/P_i) + P_i\}$

定義より

　　$\mathbf{H =< L < H + 1}$

4　誤りのある通信路を通じた通信　Communication through Channel with Errors

通信路モデル



定義

R　　　；情報源の情報発生速度

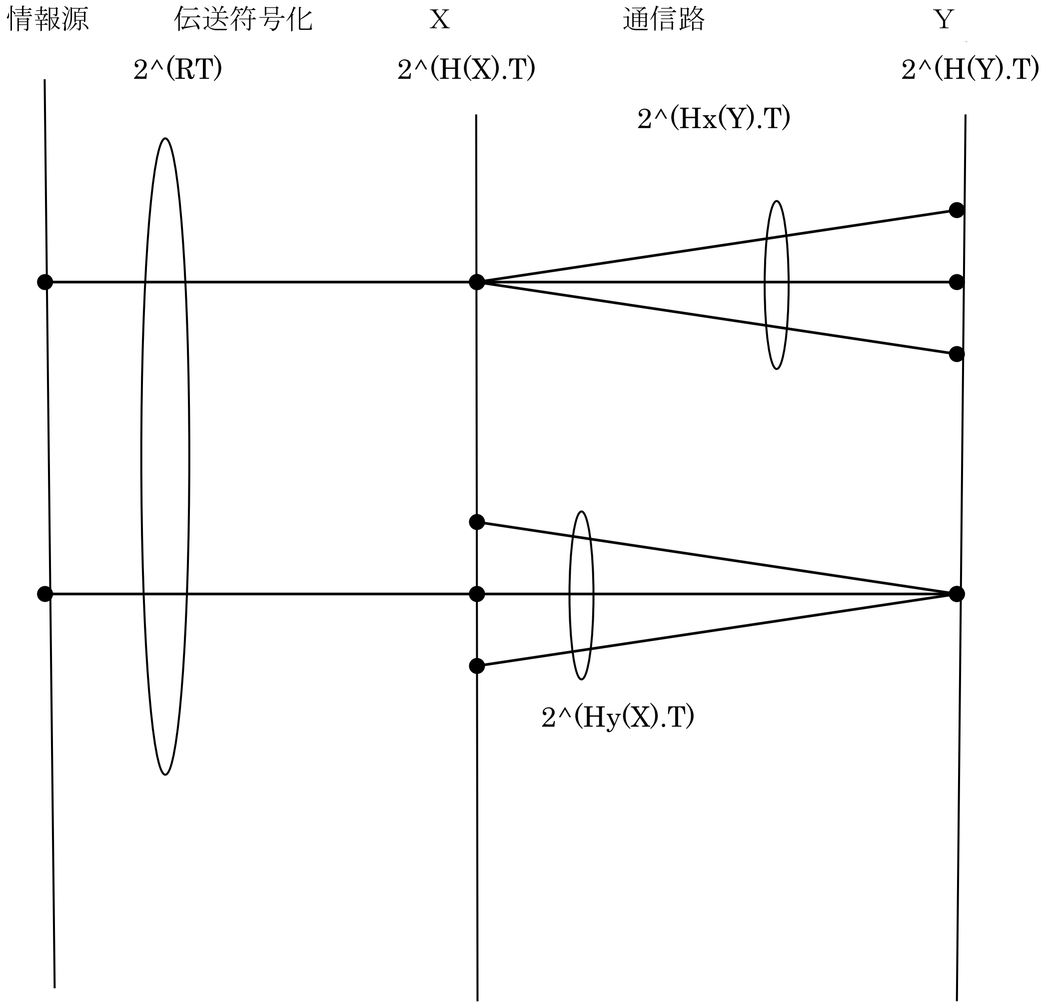
H（X）　；符号化回路出力の情報発生速度

C　　　；通信容量、Communi*cation Capacity*

H(Y)　　；受信信号の情報受信速度

単位はいずれも Bits/sec である。

伝送路における符号誤り



相互情報量

前述の相互情報量 I(X:Y)は次式によって定義される。

$$I(X{:}Y) = H(X) - H_y(X)$$
$$= H(Y) - H_x(Y)$$

誤りが無い通信路においては

yP(x) = 1(x=y), 0 (x=/=y)であるから Hy(X)=0 となる。即ち y を知れば x に関する曖昧度は 0 となる。同様に Hx(Y)=0 となる。

現実には通信路で誤りが生ずるので Hx(Y)も Hy(X)も 0 にはならない。Hx(Y)は x なる信号を送信した時に受信側で受けた信号が x になるとは限らずそれに誤りが加わるために生じる**散布度(Dissemination)**（情報エントロピー）である。Hy(X)は y なる信号を受信しても通信路で生じる誤りのために送信側の符号を決定できない**曖昧(Equivocation)**（情報エントロピー）である。

このことから相互情報量 I(X:Y)は通信路を通じて伝送される単位時間あたりの情報量であると考えられる。

通信容量 Communication Capacity

通信容量＝**伝送路符号化法を工夫**して通信路を通じて伝送できる最大の情報量

$$C = \mathbf{Max} \quad I(X{:}\ Y)$$

<u>伝送路符号化定理 Channel Coding Theorem</u>

情報源の情報発生速度ＲがＲ＜Ｃであれば**任意の値よりも小さな誤り率**で通信が可能である。

証明 Proof

伝送路では一定の率の誤りが生じるので対策としては符号化回路で**時間Ｔにわたる信号系列について符号化**を行う。時間Ｔの間に情報源から生じ得る符号列の数は 2^(T.R)通りとなる。符号化回路の出力に生じうる符号列の数は 2^(T.H(X))通りである。他方受信側において信号の数は 2^(T.H(Y))通りある。各受信信号に対応する送信信号の曖昧度は 2^((Hy(X).T)通りの送信符号列よりなる。

ランダム符号化方法

情報源の出力の 2^(T.R)通りの符号を符号化回路の出力の 2^(T.H(X))通りの符号の中から選んで通信するのが符号化である。具体的には無限に多くの方法があると考えられるがここではランダムに対応付ける方法を取るものとする。

伝送路符号の選択確率

伝送路符号化回路の出力において特定の符号が送信符号に選ばれる確率は 2^((R-H(X)).T)となる。
これが前述の曖昧度集合 2^(T.Hy(X))の中に一つも入らなければ誤は起こらない。

対偶論理

選ばれた信号が曖昧度集合 2^(T.Hy(X))の中に一つも入らない。

=

選ばれなかった符号がすべてそこに入る。

誤りが起こらない確率

{ 1 - 2^(R-H(X)).T) ^ (2^(T.Hy(X))

(=)　1 - 2^{ (R- (H(X) - Hy(X)).T)}　　　　　(T が十分大)

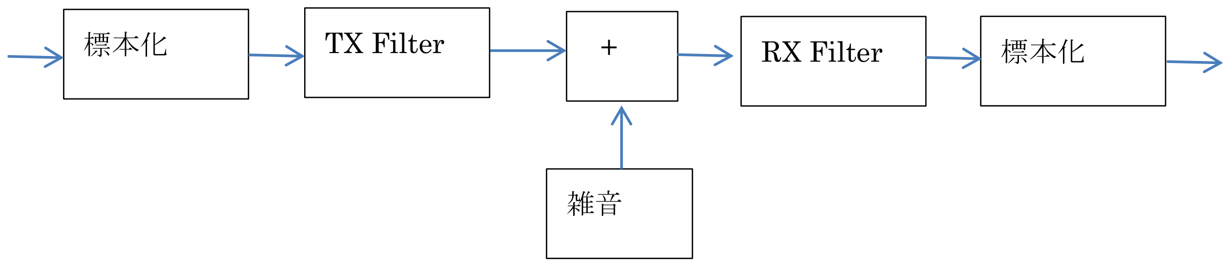
=<　1 -　2^{ (R-C).T }　　　　　　　　　　(　C >= H(X) - Hy(X)　)

→ 1　　　(T→大)

故にＲ－Ｃ＜０であればＴを大きくすれば誤り率はいくらでも小さくなる。

5.　連続信号通信路の通信容量

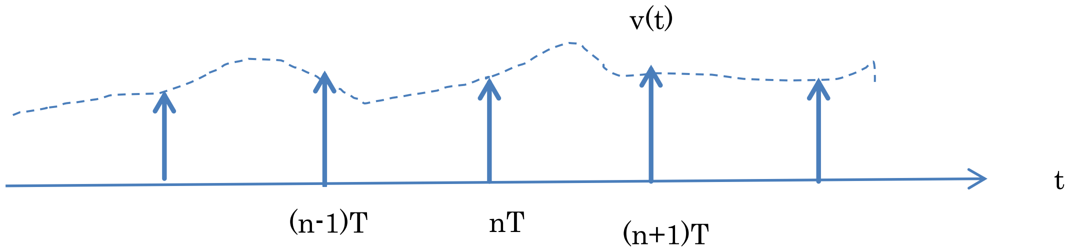
5.1　 連続信号の通信路



5.2 標本化定理

標本化回路は時間信号 v(t)を入力して次の標本化系列を出力する。

$$Vs(t) = [n]\,\Sigma \quad v(nT).\ \ \delta\,(t - n.T)$$



標本化定理　Sampling theorem

時間間隔 T で標本化される信号を歪なく再生するためには

その信号の周波数スペクトルの帯域幅は 1/(2T)以下に帯域制限されていなくてはならない。

従って周波数帯域幅 W (Hz)の通信路を通じて伝送できる標本化系列の速度は W(symbols/sec)である。またその通信路を通じて伝送できる信号の周波数帯域幅は W/2 以下である。

時間信号の周波数スペクトル及び標本化定理については付録を参照の事

5.3 連続信号の振幅分布の情報量

時間信号 x(t)の振幅分布の情報 entropy を以下に定義する。

$$H(x) = -\int p(x).\mathrm{Log}(\,p(x))\,dx$$

但し

P(x); 確率密度関数

$[-\infty,\ \infty]\int p(z).dx = 1$

これは離散信号からの類推で定義されたものであるがその意味は以下の例で理解される。

連続変数の最大情報 entropy 定理

エネルギー制限のもとで情報 entropy が最大となるのは正規分布である。

証明

エネルギー　$\int x^2 . P(x) = \sigma^2$　(一定)

確率　$\int p(x).dx = 1$

なる制限の下で

$$H(x) = -\int p(x).\mathrm{Log}(p(x))\,dx$$ を最大化する。

Lagrange の未定係数法により求める解は

$$P(x) = 1/\sqrt{2\pi\sigma^2}\ .\exp(-x^2/(2\sigma^2))$$

及び情報 entropy は

$$H(x) = \mathrm{Log}(\sqrt{2\pi e\sigma^2})$$

定理　確率変数の和の分布

確率変数 x, , z の分布は平均 0, 分散は各々 σx, σz の正規分布であるとする。

両者の和の確率変数 y

$$y = x + z$$

の分布は正規分布でありその分散 σy は

$$(\sigma y)^2 = (\sigma x)^2 + (\sigma z)^2$$

連続通信路の振幅情報量伝送

送信信号 x, 受信信号 y, 伝送路で加わる熱雑音を z とする。

$$y = x + z$$

この通信路を通して伝送される振幅情報伝送量は

$$\begin{aligned} I(x{:}y) &= H(x) - Hy(x) \quad = H(y) - Hx(y) \\ &= \mathrm{Log}(\sqrt{2\pi e.(S+N)}) - \mathrm{Log}(\sqrt{2\pi e.N}) \\ &= \mathrm{Log}((S+N)/N) \\ &= \mathrm{Log}(1+S/N) \end{aligned}$$

但し S , N はそれぞれ信号電力、雑音電力である。

ここで受信曖昧度は通信路で加わる熱雑音の情報 entropy に他ならないので

$$Hx(y) = H(z)$$

を用いた。

5.4 連続信号通信路の通信容量

通信路の周波数帯域幅を W(Hz)とすると毎秒 W 個の標本系列を伝送できる。また最大情報伝送可能な信号の振幅分布は正規分布の場合である。それが達成されたとすると

通信容量 C は

$$C = W.\mathrm{Log}(1+S/N)$$

となる。

付録

時間信号の周波数スペクトル

時間 t の信号　v(t) の周波数スペクトルは

Fourier 変換

$V(\omega) = [-\infty,\infty] \int v(t).\ e^{-(j\omega .t)}\ dt$　　　　　　　$(j^2 = -1)$

条件　$\| v(t) \|^2 = [-\infty,\infty] \int |v(t)|^2\ dt < \infty$　　　　L2 積分可能

ただし

$\omega = 2\pi .f$　(rad/sec)　；角周波数

f；　(c/s, Hz)　；周波数

Fourier 逆変換

$v(t) = 1/2\pi . \int V(\omega)\ e^{(j\omega .t)}\ d\omega$

証明

$1/2\pi . \int V(\omega)\ e^{(j\omega .t)}\ d\omega$

$= 1/2\pi . \int \{ \int v(t').\ e^{-(j\omega .t')}\ dt' \} .\ e^{(j\omega .t)}\ d\omega$

$= \int v(t').\ 1/2\pi \int .e^{(j\omega .(t-t'))}\ d\omega\ .\ dt'$

$= \int v(t').\ \delta(t-t').\ dt'$

$= v(t)$

δ 関数

$\delta(t) = 1/2\pi [-\infty,\infty] \int .e^{(j\omega .t)}\ d\omega = [-\infty,\infty] \int .e^{(j2\pi f.t)}\ df$

$\delta(\omega) = [-\infty,\infty] \int .e^{(j\omega .t)}\ dt = [-\infty,\infty] \int .e^{(j2\pi f.t)}\ dt$

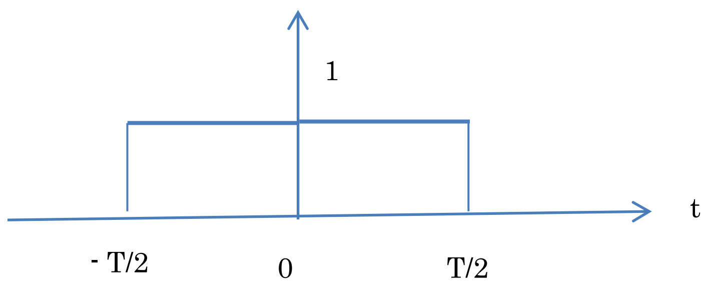
$v(t) = \int v(t').\ \delta(t-t').\ dt'$

例

<u>矩形時間信号</u>

$v(t) = 1$　$(-T/2 < t < T/2)$

$= 0$　(それ以外)



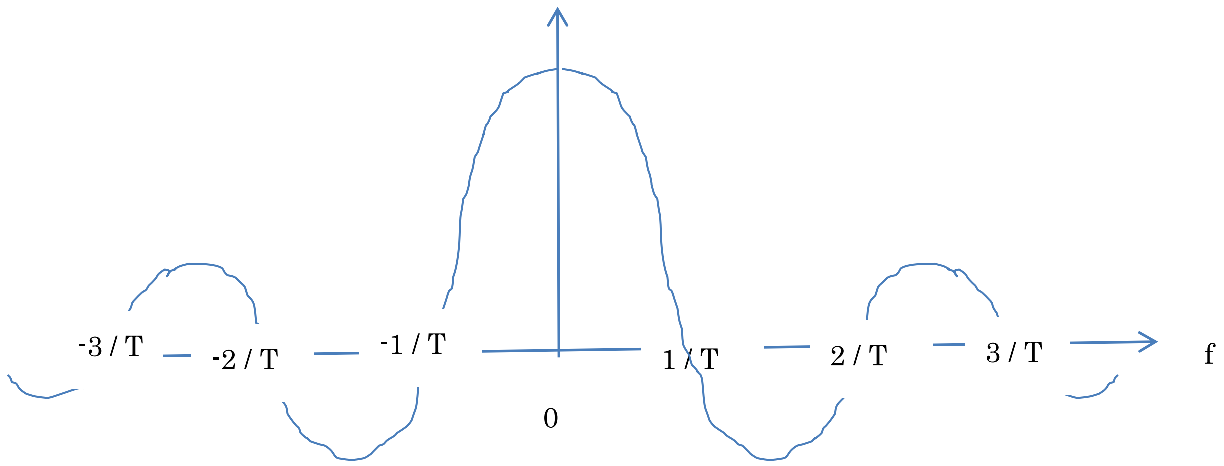
周波数スペクトルは

$$V(\omega) = [-T/2, T/2] \int e^{\wedge}(\omega.t)\, dt$$
$$= \sin(\omega.T/2) / ((\omega.T/2)$$
$$V(f) = \sin(\pi.f.T) / (\pi.f.T)$$

特長

$V(0) = 1$

$V(f) = 0$ at $f = n/T$ $(n = +-1, +-2, ,,,)$



周波数と時間の関係

時間信号 v(t)の周波数スペクトル

$$V(f) = [-\infty, \infty] \int v(t).e^{\wedge}(-2\pi f.t)\, dt$$
$$V(t) = [-\infty, \infty] \int V(f).e^{\wedge}(2\pi f.t)\, df$$

時間と周波数は対称的である。即ち f, t を相互に入れ替えても同じ形の法則が成り立つ。

従って周波数スペクトルが

$V(f) = 1$ $(-F/2 < f < F/2)$

$= 0$ (それ以外)

なる信号の時間関数は

$v(t) = \sin(\pi.t.F) / (\pi.t.F)$

特長

$v(0) = 1$

$v(t) = 0$ at $t = n/F$ (n= +-1, +-2,,,,,)

この性質は広くデータ通信に用いられる。

Fourier 級数

周期的な関数 s(t)

$s(t+T) = s(t)$ T; 周期(period)

変数 t の領域は $[-\infty, \infty]$である。

周期関数は次の三角級数展開が可能である。

$$s(t) = [n\,;\,,,,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,,,,,]\ \Sigma\, c(n).\ \exp(j.2\pi.n\,.\,t\,/\,T)$$

$$c(n) = 1/T\ .\ [\,-T/2,\ T/2\,]\ \int s(t).\ \exp(\,-\,j.2\pi.n\,.t\,/\,T)\ dt$$

標本化 Impulse 列

$$s\,(t) = [n\,;\,,,,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,,,,,]\ \Sigma\ \delta\,(\,t - n.\,T\,)$$

時間信号の標本化系列

これにより時間信号 v(t)を標本化して得られる信号 vs(t)は

$$vs(t) = [n\,;\,,,,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,,,,,]\ \Sigma\, v(nT).\ \delta\,(\,t - n.\,T\,)$$

その周波数スペクトルは

$$Vs(\omega) = 1/T\ .\ [\,-T/2,\ T/2\,]\ \int vs(t).\ \exp(\,-\,j\,\omega.t\,)\ dt$$

$$= 1/T\ .[n\,;\,,,,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,,,,,]\ \Sigma\, v(nT)\ .\ \exp\,(\,n.T.\omega\,)$$

$$Vs(f) = 1/T\ .[n\,;\,,,,-2,\,-1,\,0,\,1,\,2,\,3,,,,,]\ \Sigma\, v(nT)\ .\ \exp\,(\,2\pi\, f.n.T\,)$$

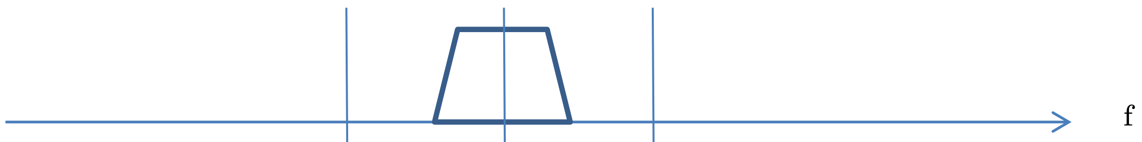
これは周波数の周期関数である。

$$Vs(f + 1/T) = Vs(f)$$

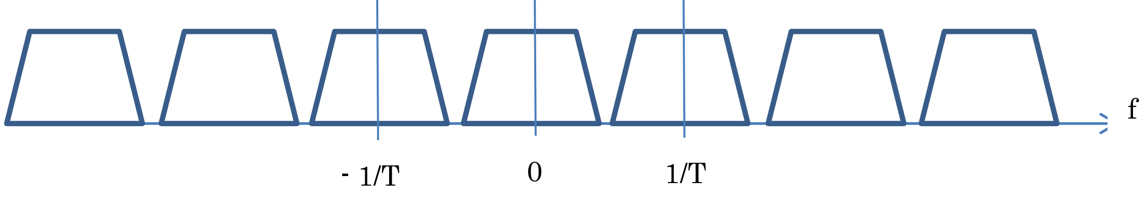
標本化定理

以上を下図に示す。

信号 v(t)の周波数スペクトル V(f)



信号 vs(t)の周波数スペクトル Vs(f)



これらの図から標本化定理の意味は明確であろう。

標本化定理

標本化周波数 1/T で信号 v(t)を標本化する場合、歪を生じないためには信号 v(t)の周波数スペクトル V(f)の周波数帯域幅が[-T/2 , T/2]の範囲に制限される事が必要十分である。