運動体の電気力学についての一考察

市吉　修

2018 年 2 月 16 日

始めに

電界 **E**, 磁界 **B** の電磁界に電気量 q の粒子が速度 **v** で運動していると力 **f** = q.(**E** + **v**×**B**)を受ける。
即ちベクトル積 v×B は等価的に電界であるがその根源的な説明は 1905 年の A. Einstein による論文「運動体の電気力学」において特殊相対性理論によって与えられた[1]。アインシュタインは運動する荷電粒子が磁界の中に電界を生ずる現象を起電力と名づけた。
本論においては相対性理論によらず M. Faraday によって発見され J. C. Maxwell によって定式化された電磁誘導の方程式から起電力を直接導く事とする。

1.　電磁誘導の方程式。

電界 **E**, 磁界 **B** の間には次の電磁誘導の関係がある。

$$\nabla\times\ \mathbf{E} = -\ \partial\mathbf{B}\ /\partial t$$

これは磁界の時間変化が電界を生ずる事を示している。

2.　電磁誘導から起電力の導出

電荷 q を帯びた粒子がこの電磁界の中を速度 **v** で運動しているものとする。
電磁誘導の式を時間積分して

$$\int \nabla\times\ \mathbf{E}\ dt = \mathbf{B}$$

すると

$$q\mathbf{v}\times B\ \ = q\int \mathbf{v}\times(\nabla\times\ \mathbf{E})\ dt\ \ = q\int [-(\mathbf{v}.\nabla)\ \mathbf{E} +\ \nabla(\mathbf{v}.\ \mathbf{E})]\ dt$$

$$= \int [-(\mathbf{v}.\nabla)\ \mathbf{f} +\ \nabla(\mathbf{v}.\ \mathbf{f})]\ dt$$

但し **f** = q.**E** は荷電粒子に電界が作用する力である。
他方荷電粒子の質量を m とすると力 **f** は次の様な力学的表現も可能である。

$$\mathbf{f} = q.\mathbf{E}\ \ = m\ .\ \partial\mathbf{v}/\partial t$$

すると

$$(\mathbf{v}.\nabla)\ \mathbf{f}\ \ = \mathbf{m}.(\mathbf{v}.\nabla)\ \partial\mathbf{v}/\partial t = \mathbf{0} \qquad ([\partial/\partial x][\partial/\partial t][\partial x/\partial t] = [\partial/\partial t][\partial/\partial t][\partial x/\partial x] = 0)$$

他方∇(**v. f**)についてみると(**v. f**)は単位時間当たりの力学的な仕事ありその時間積分は仕事となる。
ここでは他にネルギーの支出は無いのでその仕事は力学的 Potential　ϕ として蓄積される。
以上をまとめると

$$q.(\mathbf{v}\times\ B)\ \ = \nabla\phi$$

即ち q.(**v**×B)は力であり従って **v**×B は磁界と運動する荷電粒子により生ずる起電力に由来する電界である事が分かる。

3.　例 1

一様な磁界 B に初速度 **v** で電荷 q を帯びた粒子が突入したとする。起電力によってこの荷電粒子が受ける力 q.(**v**×B)は磁界 B にも速度 **v** にも直交する。即ちその荷電粒子は磁界 B に垂直な平面上で円軌道の運動を行う。

その円の半径を r とすると円軌道の求心力は起電力に由る電界によって与えられる事から

$$m.v^2/r = q.\mathbf{v}.\ B$$

軌道円の半径 r は

$$r = (m.v) / (q.B)$$

上の円運動は電荷 q とは逆極性の電荷 q'と質量 m に対して遥かに大きい質量 M を有する物体を中心とする静電運動に等価である。この仮想求心力は静電力に由るから

$$(q.q') /(r^2) = q.\mathbf{v}.\ B$$

これより

$$q' = (m.v / q)^2 / B$$

静電 Potencial は

$$\phi = - q' / r$$

4.　例 2

一様電界 B の中に下図のような導体の輪を外力により回転させるものとする。

上述の議論により右の輪の上では手前、下では奥行方向に起電力による電界 E が生じる。

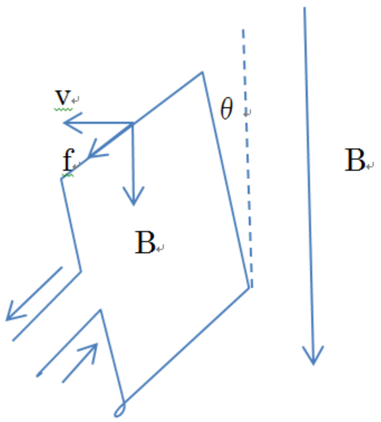
これは輪に沿った線積分により輪の両端に

$$\int E\, ds = V$$

なる電位差を生ずる。

この輪を外部の回路につなぐと電流が流れ、発電機として作用する。

逆に外部より電流を供給すると磁界中の輪に回転力が生じ電動機として作用する。



起電力と電磁誘導の関係

通常上の発電機と電動機の作用は電磁誘導により説明される。電磁誘導の式

$$\nabla\times\ E = - \partial B /\partial t$$

に対して輪の面ベクトル $\mathbf{S} = 2d.L$ (2d は輪の幅、L は長さ、ベクトルの向きは面に直角)による面積分を行うと Stokes の定理により

$$\int \nabla \times \ E \, d\mathbf{S} = \int E \, ds = V = -\partial(B.S.\sin(\theta))/\partial t$$

今輪の回転の角速度を ω とすると

$$\theta = \omega .t$$

故に

$$V = -\omega .d.B.\cos(\theta).2L = E.2L$$

電磁誘導によって生じる電界 E は

$$E = -\omega .d.B.\cos(\theta) = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

但し **v** は回転する導体の速度である。

以上により電磁誘導による電界と運動体の起電力に由る電界は等価である事が示された。

参考文献

[1] アインシュタイン「相対性理論」内山龍雄訳　岩波文庫