

## 最大度復号法との特性

maximum Likelihood Decoder and its Performances

内容

1. 基本原理：通信路符号化定理 (Channel Coding Theorem)  
C.E. Shannon (1948)

## 2. 最大度復号法との特性

類似度 (likelihood) に基づく復号法

3. ~~伝送~~ 2+3) 2+3と Viterbi 復号法

Convolutional Codes and Viterbi Decoder

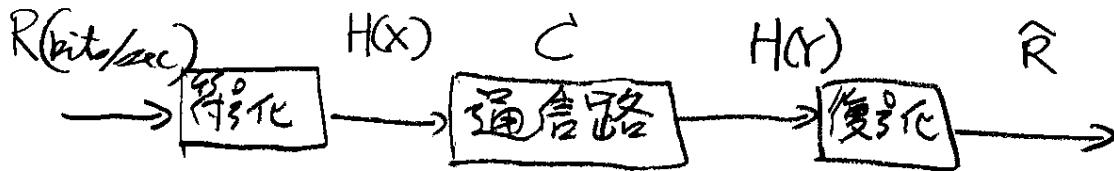
## 4. Turbo 等

## 5. まとめ

## 参考文献

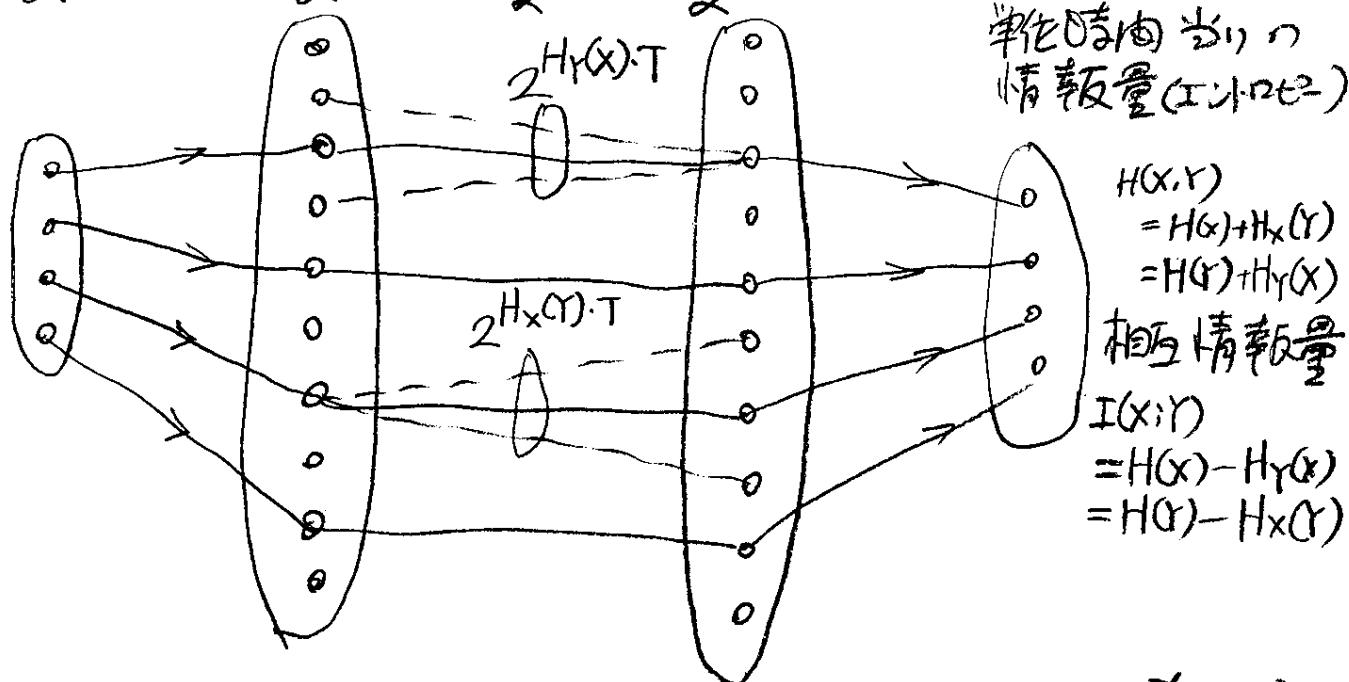
1. C.E. Shannon "Mathematical Theory of Communication", Bell System Technical Journal, 1948
2. A.J. Viterbi, J.K. Omura, Principles of Digital Communication and Coding, McGraw-Hill, 日文社
3. Claude Berrou, Allan Glavieux, "Near Optimum Error Correcting and Decoding: Turbo-Codes"  
IEEE Trans. Com. Vol.44, No.10, October, 1996

# 1. 通信路符号化定理



時間  $T$  だけ蓄積する場合の取扱い得る符号の数

$$2^{RT} \quad 2^{H(X) \cdot T} \quad 2^{CT} \quad 2^{H(Y)T}$$



注;  
 $H(X), H(Y), \dots$  は  
 単化するあたりの  
 情報量 ( $I(X; Y)$ )

$$\begin{aligned} H(X, Y) &= H(X) + H_{X|Y}(Y) \\ &= H(Y) + H_{Y|X}(X) \\ &\text{相互情報量} \\ I(X; Y) &= H(X) - H_{X|Y}(Y) \\ &= H(Y) - H_{Y|X}(X) \end{aligned}$$

通信路に於ける雑音の分布度 (Dissemination)

$H_x(Y)$  とあいまい度 (Equivocation)  $H_y(X)$  を含む。

通信容量  $C$  とは

$$C = \max_{\text{符号化}} \{ H(Y) - H_x(Y) \} = \max \{ H(X) - H_{Y|X}(X) \}$$

22乙 相互情報量  $I(X; Y)$

$$I(X; Y) = H(Y) - H_{X|Y}(Y) = H(X) - H_{Y|X}(X)$$

は上の通信路を流れる情報量 (単化するあたり) であると  
 解釈できる。(誤りの無く完全な通信路では  $H_x(Y) = H_{Y|X}(X) = 0$ )  
 逆に完全なノイズ誤りの通信路では  $H_x(Y) = H(Y)$  で  $I(X; Y) = 0$  となる。  
 細分化定理;

$R < C$  であれば  $T$  を大きくすれば誤り率は小さくなる。

## 2. 自主公開講座

2005/2/2  
2003/1/29(再)

1. 通信路ノード  
Maximum Likelihood Detection for Data Communication

1. 通信路 Model  
(Model for Communication Path)

2. 総似度 ( likelihood )

3. 最大度検法 ( Maximum Likelihood Det. MLD )

4. 滑らか化 Viterbi 検法  
Convolutional Coding and Viterbi Decoding Algorithm

4.1 滑らか化 検法 ( Convolutional Encoder )

4.2 Viterbi Decoding Algorithm

参考文献 ( References )

1. A.J. Viterbi, J.K. Omura, Principles of Digital Communication and Coding International Student Edition, McGraw-Hill, KOGAKUSHO.

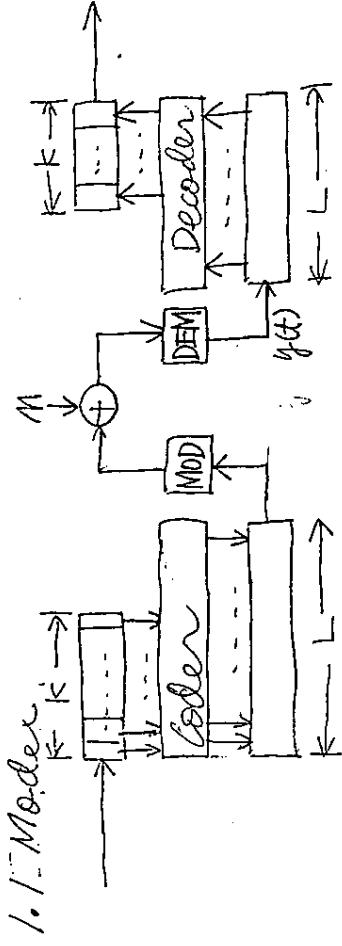


図 1-1 Model for Data Communication

原情報 Data (Original Information Data)

- Sampling Period  $T_s$  (sec)
- Coding rate:  $r = K/L$

- Block length  $T = L \cdot T_s = K \cdot T_b$

1.2 情報信号と雑音  
信号  $x_m(k)$ ,  $m=1, 2, \dots, M=2^K$   
 $x_m(k)$  は一般に複素複数

1. 離散信号  $R(\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} R_m(k) \delta(\tau - kT)$   
Power Spectrum  $S_m(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_m(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau$   
 $= N_0 S(\tau)$

$$\begin{aligned} y(t) &= x_m(t) + n(t) \\ &\quad (\text{at DEM output}) \end{aligned}$$

(1.2-4)

2.類似度 (Likelihood)  
複素信号  $U(t), V(t)$  の類似度

$$P(u, v) = \frac{|(u, v)|}{\|u\| \cdot \|v\|}$$

$\therefore$  2.類似度 (Likelihood)   
Inner Product of time functions  $u, v$

$$(u, v) = \int_0^T u(t)v(t)^* dt \quad (2-2)$$

Norm of  $u(t)$

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)} \quad (2-3)$$

類似度  
Achieving or 不等式 (Inequality) は

$$|(u, v)|^2 \leq \|u\|^2 \cdot \|v\|^2 \quad (2-4)$$

$$|\int(u, v)| \leq 1 \quad (2-5)$$

Inequality holds iff  $u = v$

(注)  $u = u' e^{j\theta} \quad (\theta: \text{Constant}) \quad (2-6)$   
 $\|u\| = \|u'\| \quad (2-7)$

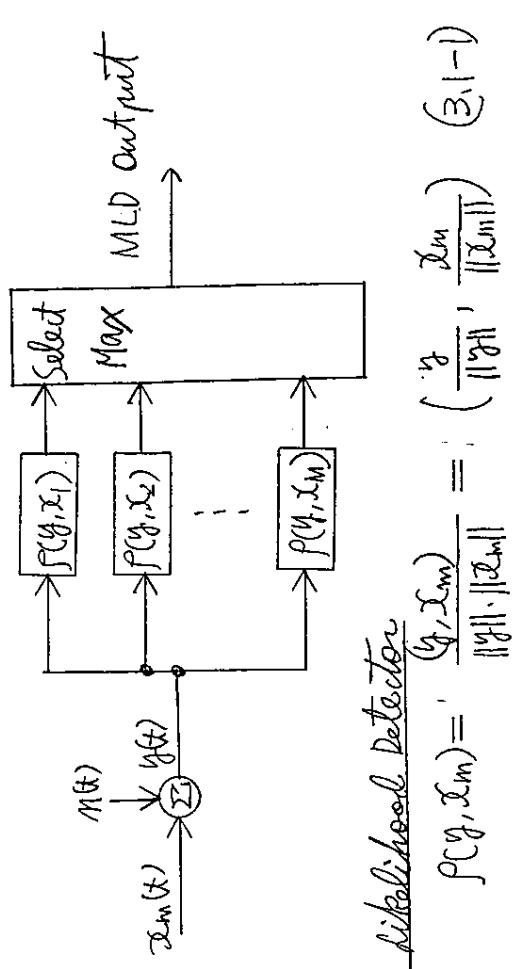
$$P(u, v) = P_0 \left| \frac{e^{j\theta} (u', v)}{\|u'\| \cdot \|v\|} \right| = \frac{(u', v)}{\|u'\| \cdot \|v\|} \quad (2-8)$$

(実数)

$|P| = 1 \neq$

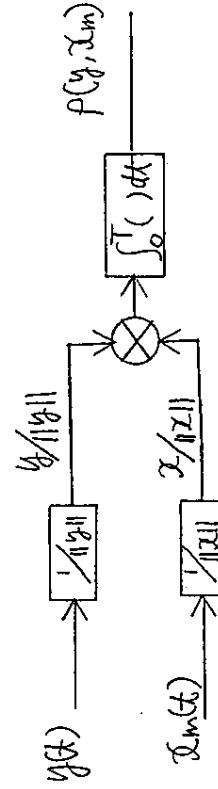
$$P(u, v) = \left| \frac{(u, v)}{\|u\| \cdot \|v\|} \right| \quad (2-9)$$

3. 最大度量定理 (Maximum Likelihood Detection)
- 3.1 判定法 (Detection Method)
- ④ 3-1 (= MLD) の構成を示す。



Likelihood Detector

$$p(y, x_m) = \frac{(y, x_m)}{\|y\| \cdot \|x_m\|} = \left( \frac{y}{\|y\|}, \frac{x_m}{\|x_m\|} \right) \quad (3-1-1)$$



④ 3-1 最大度量法の構成

- 3.2 最大度量法の誤り率 (Probability of Error Detection)
- 今送信信号  $y(t)$  と受信信号  $x_m(t)$  は
- $$y(t) = x_m(t) + n(t) \quad (3-2-1)$$

$$D_x = (x_m, \frac{x_e}{\|x_e\|}) + (m, \frac{x_e}{\|x_e\|}) \quad (3.2-2)$$

振りが生ずるときは  
 $D_x \geq D_m$

$$\begin{aligned} & \text{もし } D_x \text{ が } D_m \text{ より大きければ} \\ & D_x - D_m = (x_m, \frac{x_e}{\|x_e\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|}) + \left( m, \frac{x_e}{\|x_e\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right) \end{aligned} \quad (3.2-3)$$

$$= \|x_m\| \cdot (\rho(m, \ell) - 1) + \left( m, \frac{x_e}{\|x_e\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right) \quad (3.2-4)$$

$$\rho(m, \ell) = \frac{(x_m, x_e)}{\|x_m\| \cdot \|x_e\|} \quad (3.2-5)$$

$D_x - D_m$  の確率分布

$$\text{平均 (Average); } \alpha = \|x_m\| \cdot (\rho(m, \ell) - 1) \quad (3.2-6)$$

$$\text{分散 (Variance); } \sigma^2 = E \left[ \left( m, \frac{x_e}{\|x_e\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right)^2 \right]$$

$$\begin{aligned} & = \iint n(t) \cdot \left( \frac{x_e(t)}{\|x_e(t)\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right) \cdot m(t) \cdot \left( \frac{x_e(t)}{\|x_e(t)\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right) dx dt \\ & = N_0 \int \left| \frac{x_e(t)}{\|x_e(t)\|} - \frac{x_m}{\|x_m\|} \right|^2 dt \\ & = 2N_0 (1 - \rho(m, \ell)) \end{aligned} \quad (3.2-7)$$

$r = D_x - D_m$   
すなはちの確率密度 (確率) は

$$P(r) = \frac{1}{2\pi N_0} e^{-\frac{(r-\alpha)^2}{2\sigma^2}} \quad (3.2-8)$$

$$P(r) = \int_0^\infty p(r) dr = Q\left(\frac{-\alpha}{\sqrt{\sigma^2}}\right) \quad (3.2-9)$$

$$\frac{-\alpha}{\sqrt{\sigma^2}} = \frac{\|x_m\| (1 - \rho(m, \ell))}{\sqrt{2N_0 (1 - \rho(m, \ell))}} \quad (3.2-11)$$

$$\begin{aligned} & = \frac{\|x_m\| (1 - \rho(m, \ell))}{\sqrt{2N_0 (1 - \rho(m, \ell))}} \\ & = \sqrt{\frac{\|x_m\| (1 - \rho(m, \ell))}{2N_0}} \quad (3.2-12) \end{aligned}$$

$\varepsilon_m$  は変調信噪比の因数である。

$$\begin{aligned} & \times 1 - \rho(m, \ell) = 1 - \left( \frac{x_m}{\|x_m\|}, \frac{x_e}{\|x_e\|} \right) \\ & = \frac{1}{2} \left\| \frac{x_m}{\|x_m\|} - \frac{x_e}{\|x_e\|} \right\|^2 \quad (3.2-13) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{放り出力確率 (はきしゆり) } \\ & P_e(m \rightarrow \ell) = Q\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2N_0} (1 - \rho(m, \ell))}\right) \quad (3.2-14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{類似度の確率} \\ & P_e(m \rightarrow \ell) \leq Q\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2N_0} (1 - \rho(m, \ell))}\right) \quad (3.2-15) \\ & \leq Q\left(\sqrt{\frac{\varepsilon_m}{4N_0} \cdot \left\| \frac{x_m}{\|x_m\|} - \frac{x_e}{\|x_e\|} \right\|^2}\right) \quad (3.2-16) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{RP: 信噪比の電力 (W) である。} \\ & C = \frac{\varepsilon_m}{T} \text{ (W)} \quad \text{ここで } C = \frac{C_T}{4N_0 (1 - \rho_{max})} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2N_0 (1 - \rho_{max})}} < e^{-\frac{C_T}{4N_0 (1 - \rho_{max})}} \quad (3.2-17) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \text{RP: 信噪比の電力 (W) である。} \\ & C = \frac{C_T}{T} \text{ (W)} \quad \text{ここで } C = \frac{C_T}{4N_0 (1 - \rho_{max})} \cdot \sqrt{\frac{\varepsilon_m}{2N_0 (1 - \rho_{max})}} < e^{-\frac{C_T}{4N_0 (1 - \rho_{max})}} \quad (3.2-18) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & R = \text{Data Rate; } R = \frac{C}{T} \cdot \ln 2 \cdot R \quad (3.2-19) \end{aligned}$$

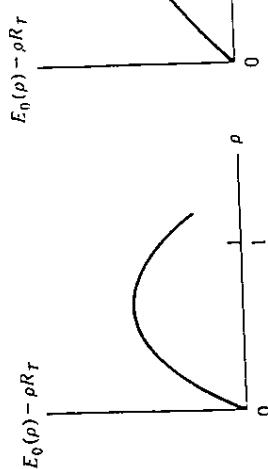


Figure 2.6 Negative exponent of upper bound (2.5.15):  
 (a)  $\frac{1}{4} < R_T/C_T < 1$   
 (b)  $R_T/C_T < \frac{1}{4}$

where

$$E(R_T) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_T - R_T & 0 \leq R_T/C_T \leq \frac{1}{4} \\ (\sqrt{C_T} - \sqrt{R_T})^2 & \frac{1}{4} \leq R_T/C_T \leq 1 \end{cases}$$

For  $R_T > C_T$ , the bound is useless and in fact, as will be discussed in the next chapter, in this region,  $P_E \rightarrow 1$  as  $T$  and  $M$  approach infinity.

The bound (2.5.16) was first obtained in a somewhat more elaborate form by R. M. Fano [1961]. The negative exponent  $E(R_T)$ , sometimes called the reliability function, is shown in Fig. 2.7. Note that the union-Bhattacharyya bound (2.3.19), corresponding to (2.5.12) with  $\rho = 1$ , would produce the straight-line exponent shown dashed in the figure. Thus the Gallager bound dominates the union bound everywhere but at low rates, a property we shall find true for much more general channels and signal sets.

$$E(R_T)/C_T$$

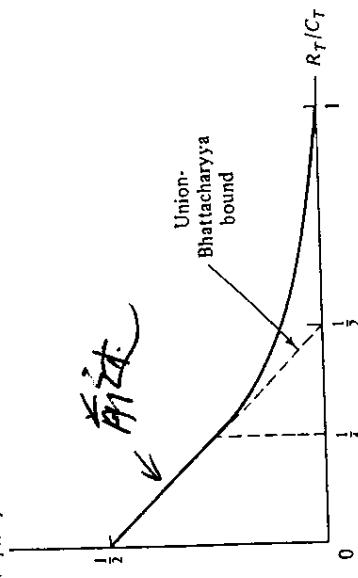


Figure 2.7 Negative exponent of optimized upper bound (2.5.16).

Another choice of parameters, more physically oriented than those in (2.5.13) and (2.5.14), involves the received energy per information bit. This is defined in terms of the system of Fig. 2.1 where  $q = 2$ , as the energy per symbol normalized by the number of bits transmitted per symbol, that is,

$$\mathcal{E}_b \equiv \mathcal{E}/K = \frac{\delta}{\log_2 M} \quad (2.5.17)$$

$$\frac{C_T}{R_T} = \frac{\mathcal{E}_b}{N_o \ln 2} \quad (2.5.18)$$

Comparing with (2.5.13) and (2.5.14), we see that

$\mathcal{E}_b/N_o$  is called the *bit energy-to-noise density ratio*. Thus, (2.5.16) and (2.5.18) together imply that, with orthogonal signals,  $P_E$  decreases exponentially with  $T$  for all  $\mathcal{E}_b/N_o > \ln 2$ .

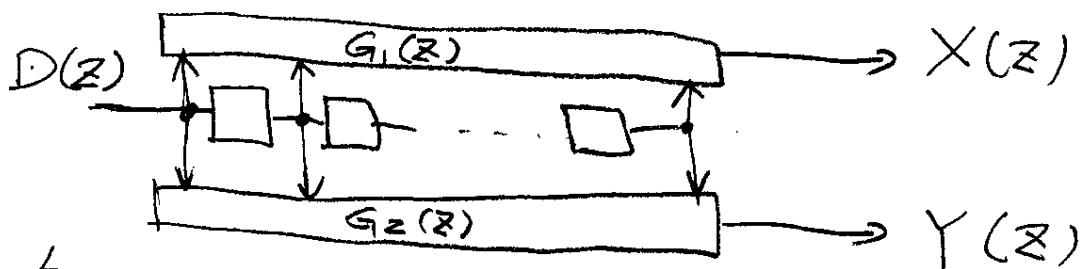
Ultimately, the most important consequence of (2.5.16) is that, by letting  $T$ , and hence  $M$ , become asymptotically large, we can make  $P_E$  become arbitrarily small for all transmission rates  $R_T < C_T$  (or in this case, for all  $\mathcal{E}_b/N_o > \ln 2$ ). Again, this is a fundamental result applicable to all channels. However, making  $T$  very large may be prohibitive in system complexity. In fact, as will be shown in the next section, this is always the case for orthogonal signals. The major part of this book deals with the problem of finding signal sets, or codes, and decoding techniques for which system complexity remains manageable as  $T$  and  $M$  increase.

## 2.6 BANDWIDTH CONSTRAINTS, INTERSYMBOL INTERFERENCE, AND TRACKING UNCERTAINTY

Up to this point, the only constraint we have imposed on the signal set was the fundamental one of finite energy. Almost as important is the dimensionality constraint imposed by bandwidth requirements. The only limitation on dimensionality discussed thus far was the one inherent in the fact that  $M$  signals defined over a  $T$ -second interval can be represented using no more than  $M$  orthogonal basis functions, or dimensions, as established by the Gram-Schmidt theorem (App. 2A). These orthogonal functions (or signal sets) can take on an infinite multitude of forms. Four of the most common are given in Table 2.1. The orthonormal relation (2.1.2) can be verified in each case. An obvious advantage of the orthonormal set of Example 1 is that, as contrasted with the general modulator and demodulator of Fig. 2.1, only a single modulator and demodulator element need be implemented, for this can be time-shared among the  $N$  dimensions, as shown in Fig. 2.8. The observables  $\{y_n\}$  then appear serially as sampled outputs of the integrator. These are generated by a device which integrates over each symbol period of duration  $T/N$ , is sampled, dumps its contents, and then proceeds to integrate over the next symbol period, etc. The orthonormal set of Example 2 requires two

### 3. 平行入力 + 緑子 Viterbi 復号法 Convolutional Codes and Viterbi Decoding

#### 3.1. 平行入力 + 緑子器の構成 (緑化率 $R_c = \frac{1}{2}$ の場合)



X<sub>k</sub>

$$D(z) = \sum d_k z^{-k}$$

出力  $\left\{ \begin{array}{l} X(z) = G_1(z) \cdot D(z), \\ Y(z) = G_2(z) \cdot D(z), \end{array} \right.$

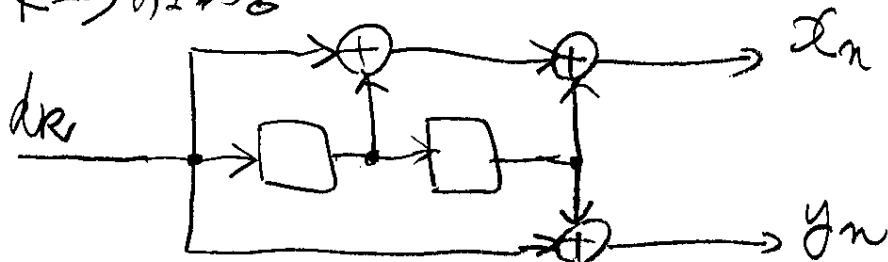
$$\left. \begin{array}{l} G_1(z) = \sum_{l=0}^{K-1} g_{1l} z^{-l} \\ G_2(z) = \sum_{l=0}^{K-1} g_{2l} z^{-l} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{生成} \\ \text{多项式} \\ \text{Generator} \\ \text{Polynomial} \end{array}$$

出力  $X(z) = \sum_n x_n z^{-n}$

$$\left\{ \begin{array}{l} x_n = \sum_{l=0}^{K-1} g_{1l} \cdot d_{n-l} \\ y_n = \sum_{l=0}^{K-1} g_{2l} \cdot d_{n-l} \end{array} \right.$$

K: 約束長 Constraint length

例. K=3 の構造



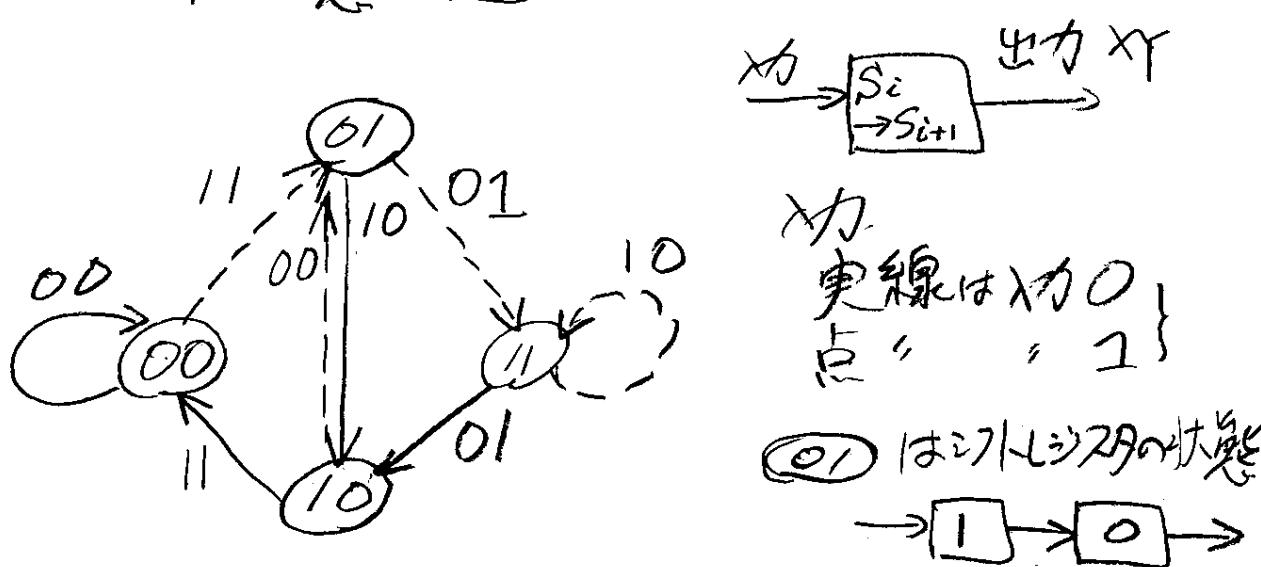
⊕; 2進加算  
または EX-OR 器

$$\begin{aligned} G_1(z) &= 1 + z^{-1} + z^{-2} \\ G_2(z) &= 1 + z^{-2} \end{aligned}$$

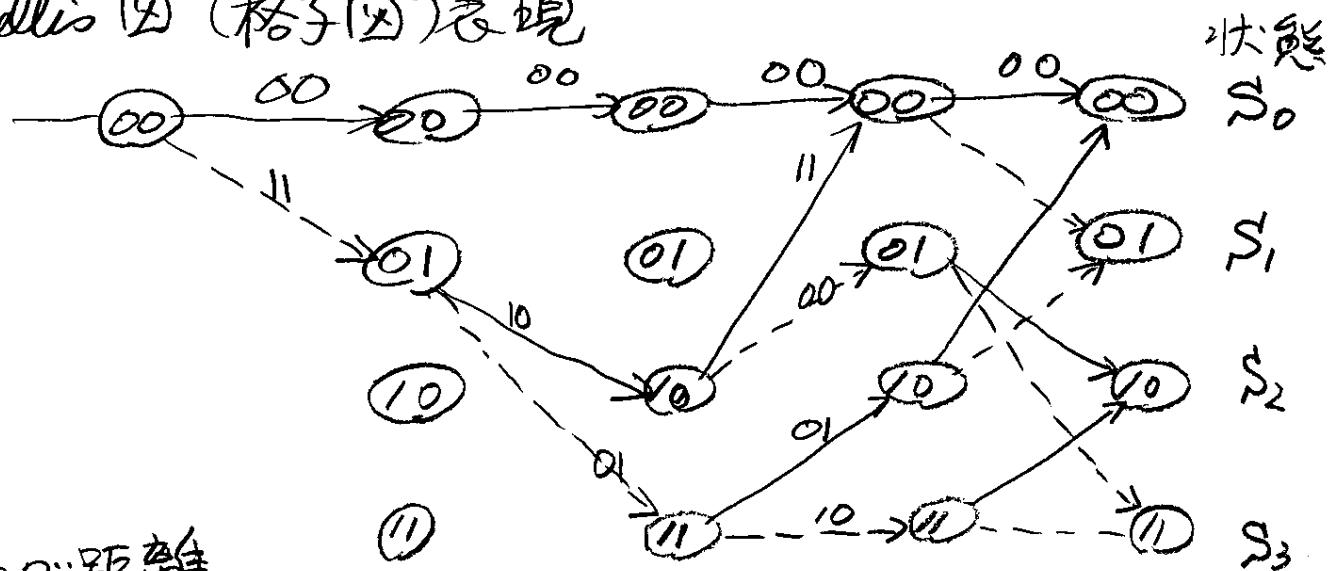
演算が mod 2 の FIR (Finite Impulse Response Filter) と同じである事から平行入力緑子と呼ばれる。22段のシフトレジスタは  $2^2 = 4$ 通りの状態があるので内部状態のある機械を見る事もできる。

## 3.2 距離構造

### 符号の内部状態の遷移図



Trellis 図 (格子図) 表現

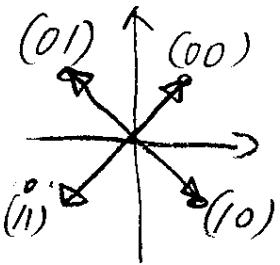


Trellis 図より Data 入力が all 0 の経路とそれは最も近い経路 0100... の符号化出力の間のハミング距離は 5 である。即ち源のデータ系列内の最小距離は 1 であるが符号化により距離が 5 に拡大する。

### ユーリッド距離

通常受信器では A/D (Analog/Digital) 変換により数値化を行う。 $X(2)-Y(2)$  を QPSK で表す場合、各標本値は独立 (ノイズ干渉なし) である場合、 $d$  は上の最小距離はユーリッド距離で、

$$d = \sqrt{2^2 + (f_2)^2 + 2^2} = \sqrt{10} \text{ となる。}$$



上のTrellis図から次の事が言える。

- (1) 各状態  $S_i$  ( $i=0, 1, \dots, 2^k-1$ ) は 2本の入力枝と 2本の出力枝がある。各枝には符号  $(X, Y)$  が付随する。
- (2) 状態  $S_j \rightarrow S_i$  の枝の符号  $b_{ji} = (X_{ji}, Y_{ji})$  と書き、上の遷移を  $S_j + b_{ji} \rightarrow S_i$  と書くこと。 $S_k + b_{ki} \rightarrow S_i$  である。 $j, k$  がある。

### 3.3. Viterbi 復号法

受信部に於て送信部の Trellis モデルを設置する。即ち各状態  $S_i$  ( $i=0, 1, 2, \dots, 2^k-1$ ) の変数  $M_i$  と各状態の入力枝の符号  $b_{ji}, b_{ki}$  である。  
(Metric)

#### ACS (Add Compare Select)

今  $j$  番目の受信信号  $r = (x, y)$  に対して次の計算を行つ。

(1) 各状態  $S_i$  について次の計算を行う。ADD

$$\begin{aligned} M'_i &= M_j + m_{ji} \\ M''_i &= M_k + m_{ki} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{state } i \text{ の 2 つの入力枝} \\ \text{の一致度 (Branch Metric) である。ハミング距離を} \\ \text{用いる場合 } x = X_{ji}, y = Y_{ji} \text{ の時 } m_{ji} = 2, x \neq X_{ji}, y \neq Y_{ji} \text{ の時 } \\ m_{ji} = 0, 2-クリット距離を用いる場合は実数。 \end{array} \right\}$$

ここで  $m_{ji}$  は受信信号  $r = (x, y)$  と枝  $b_{ji} = (X_{ji}, Y_{ji})$  の一致度 (Branch Metric) である。ハミング距離を用いる場合  $x = X_{ji}, y = Y_{ji}$  の時  $m_{ji} = 2$ ,  $x \neq X_{ji}, y \neq Y_{ji}$  の時  $m_{ji} = 0$ , 2-クリット距離を用いる場合は実数。

#### Compare and Select

上の  $M'_i$  と  $M''_i$  を比較した方を選択し他方は捨てる。  
選択した方の  $M$  を  $M_i$  に更新する。

#### Path Memory

各状態  $S_i$  の更新に於て選択された経路 (Path) の履歴を更新する (各状態の祖先の系図の如き) ⑨

上の動作によると各状態のMetric  $M_i$  は受信系列に最も近い経路選択の結果であり, Path memory はその履歴である事は直観的に明るかである。

ここで待ちが終了する時、何か既知であれば、その終了時の状態  $S_i$  の内 Metric が最大の State の Path memory が最も確からしい受信系列を与える。

実際には終了時が無くとも各 state の Path memory は時と共に一致してくる。この理由は正しい経路の Metric が最も速く増大する事にある。Trellis 図より明らかに状態の数は有限であるから経路は分岐などと共に合流する。前述の ACS 動作によって選択された枝はより近い過去に正しい path から分岐したものである場合が多い。

逆に言えば各  $S_i$  の Path memory を過去に辿ると通常正しい path に合流する。

「正しい経路の Metric が最も速く増大する」事はかなり低い条件でも成立るので Viterbi 優化法の適用範囲は非常に広い。

以上の様な代表的な特徴例を以下に示す。

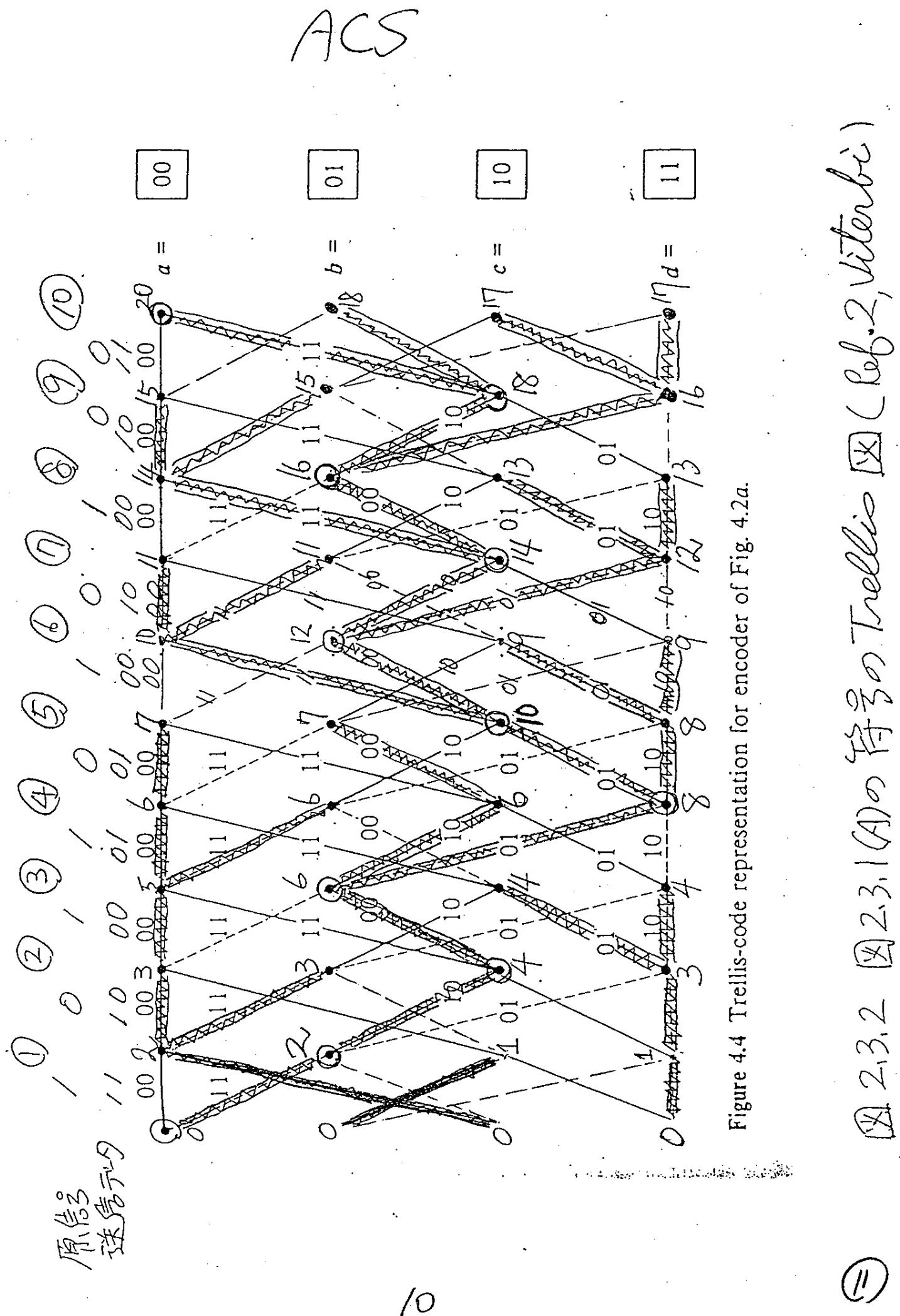


Figure 4.4 Trellis-code representation for encoder of Fig. 4.2a.

2,3,2 (A) 2,3,1 (A) の符号の Trellis (Viterbi)

(=)

タイトル

年月日

版

承認

查閱

担当

登録番号

参照番号

作成者

# Path Memory

## Path Memory

①  $a \leftarrow c$  $b \leftarrow a$  $c \leftarrow b$  $d \leftarrow d$ ②  $a \leftarrow ac$  $b \leftarrow ac$  $c \leftarrow ba$  $d \leftarrow dot$ ③  $a \leftarrow aac$  $b \leftarrow cba$  $c \leftarrow ddd$  $d \leftarrow ddd$ ④  $a \leftarrow aaac$  $b \leftarrow aaac$  $c \leftarrow bcba$  $d \leftarrow bcba$ ⑤  $a \leftarrow aaac$  $b \leftarrow cbcb$  $c \leftarrow dbcb$  $d \leftarrow dbcb$ ⑥  $a \leftarrow cdcb$  $b \leftarrow cdcb$  $c \leftarrow ddcb$  $d \leftarrow ddcb$ ⑦  $a \leftarrow acdbcb$   
 $b \leftarrow acdbcb$   
 $c \leftarrow bcdbcb$   
 $d \leftarrow bcdbcb$   
 $d \leftarrow dddbcba$ ⑧  $a \leftarrow aacdcb$   
 $a \leftarrow cbcdcb$   
 $b \leftarrow cbcdcb$   
 $c \leftarrow dbcdcb$   
 $d \leftarrow dbcdcb$ ⑨  $a \leftarrow acbcbcb$   
 $b \leftarrow acbcbcb$   
 $c \leftarrow bcacbcb$   
 $d \leftarrow bcacbcb$  $a \leftarrow aacdbcb$ ⑩  $a \leftarrow cbcbcb$   
 $b \leftarrow cbcbcb$   
 $c \leftarrow dcbcbcb$   
 $d \leftarrow dbcbcb$ 

⑪

## Punctured ピタ

符号化率が  $R_c = \frac{1}{2}$ ,  $k=7$  の事はなし。  
特定の枝情報を送らねり (Puncture)  
事に決めれば、仕事の符号化率  
を設定できること

例えば

$$r = \frac{3}{4} \quad \text{または} \quad r = \frac{1}{2} \quad \text{をもとで}$$

$$(2) \quad \frac{3}{4} / \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \text{BPS 3回} \uparrow$$

⑩を自由に分かれて設計すれば

この  
Viterbi (値31,  $\frac{3}{4}$ ) には31つかれ  
枝の branch metric = 0 として

ACSを行つ。衛星通信研究会992.9 No.39  
(Ref 4, 古賀)

図 2.3.3

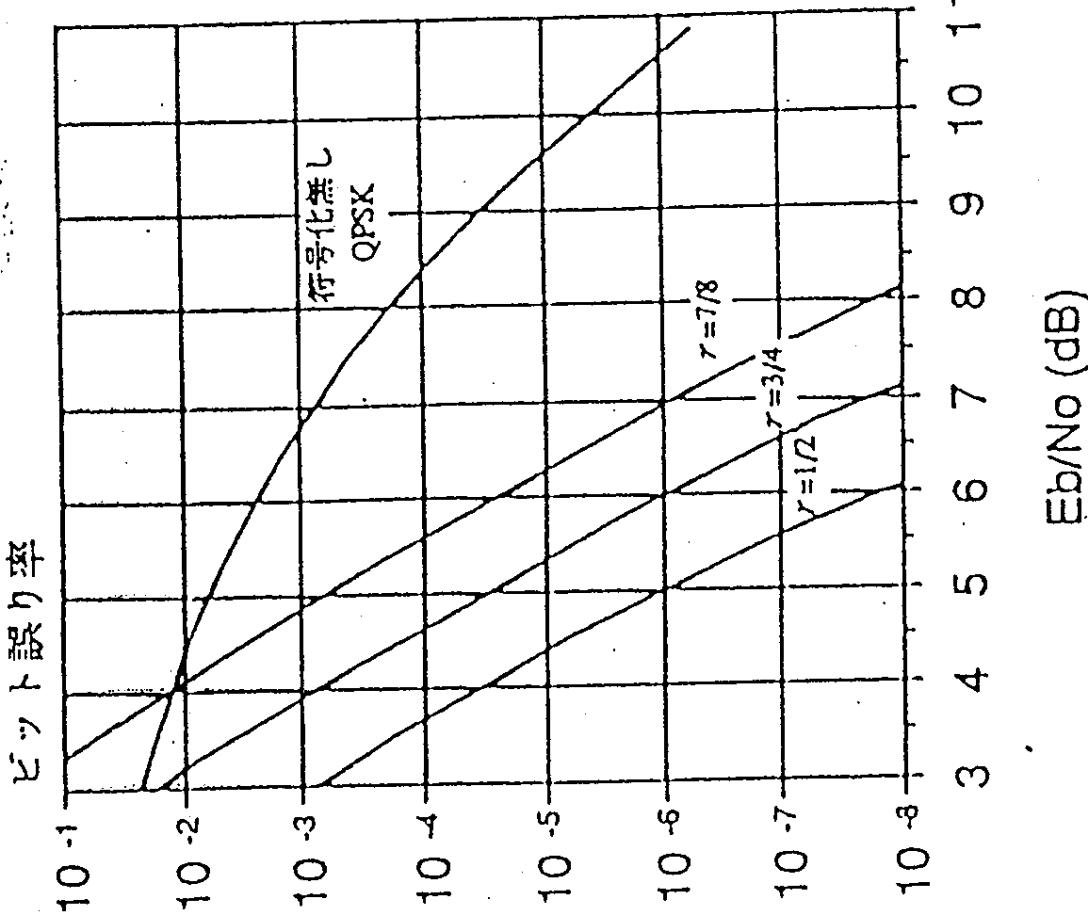


図 9 ピタビ復号の特性  
( $r = 1/2, k = 7$  符号;  $r = 3/4, 7/8$  パンクチュアド符号)

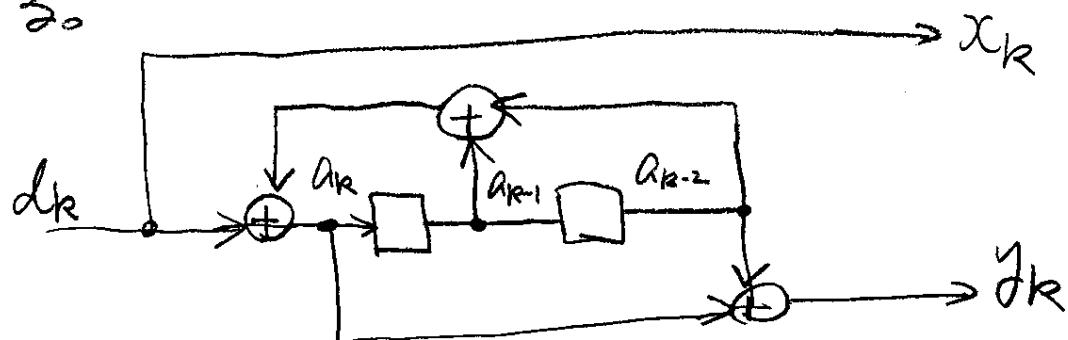
9  
E8

13

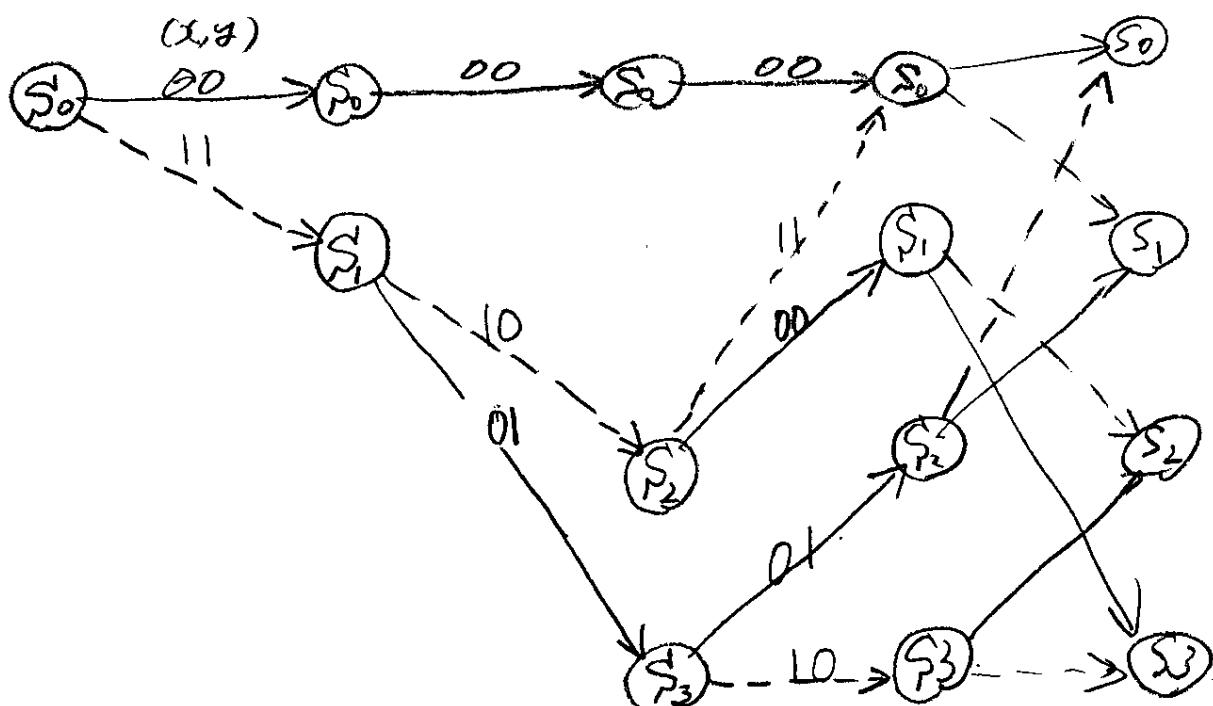
## 4. Turbo 編碼 (文献3)

### 4.1 再帰的組織編碼 (RSC)

前述のたとみ込み符号  $(x, y)$  は入力データ系列  $d$  とは一致しないものである。この様な符号を非組織符号 (Non Systematic Codes; NSC) と称する。これに対して符号の一部は入力データ列  $d$  の  $x = d$  となる符号を組織符号 (Systematic Code SC) とする。ここでは次の再帰的(recursive)SC, EPS RSC が示されている。



このTrellis図を描くと次のようになります。



構成は複雑も拘らず NSC と RSC は符号器としては同じであり Viterbi 優化法の結果も殆んど同じ結果を得る → Fig 3

re, respectively, equal  
 $j \leq n$  of matrix  $P$  is  
 $P_{1j}$  is equal to zero.

ince

ce of RSC and NSC  
 cture and their BER.  
 ade up of two sets  
 ned from two series  
 function  $T(D, N)$  [6]

$$V(d)D^d \quad (9)$$

$$V(d)D^d \quad (10)$$

de,  $a(d)$  is the number  
 in the "null" path and  
 input sequences  $\{d_k\}$   
 from the "null" path.  
 the transfer function  
 first coefficients  $a(d)$   
 the trellis by using an  
 ficients  $W(d)$ , a tight  
 be calculated for large

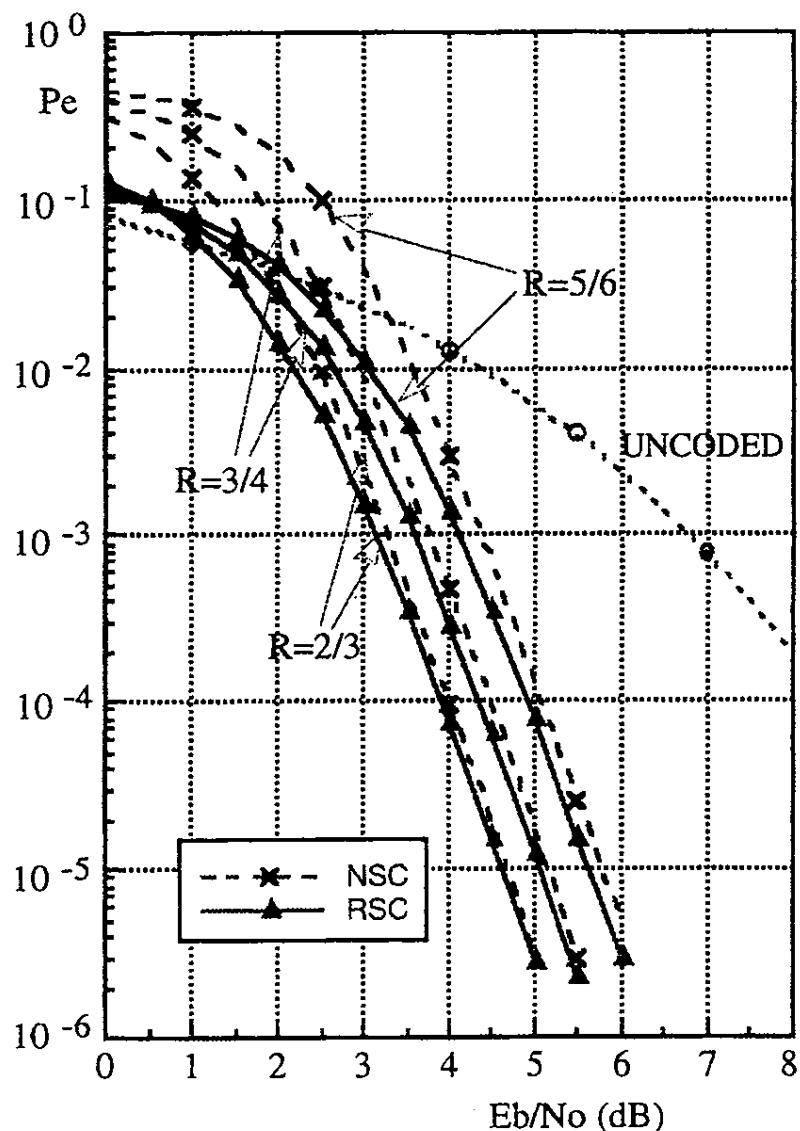


Fig. 3.  $P_e$  of punctured RSC and NSC codes for different values of rate  $R$  and memory  $\nu = 6$ , generators  $G_1 = 133, G_2 = 171$ .

is approximately 0.8 dB at  $R = 2/3$ , whereas at  $R = 3/4$ , it reaches 1.75 dB.

### III. PARALLEL CONCATENATION WITH NON UNIFORM INTERLEAVING: TURBO-CODE

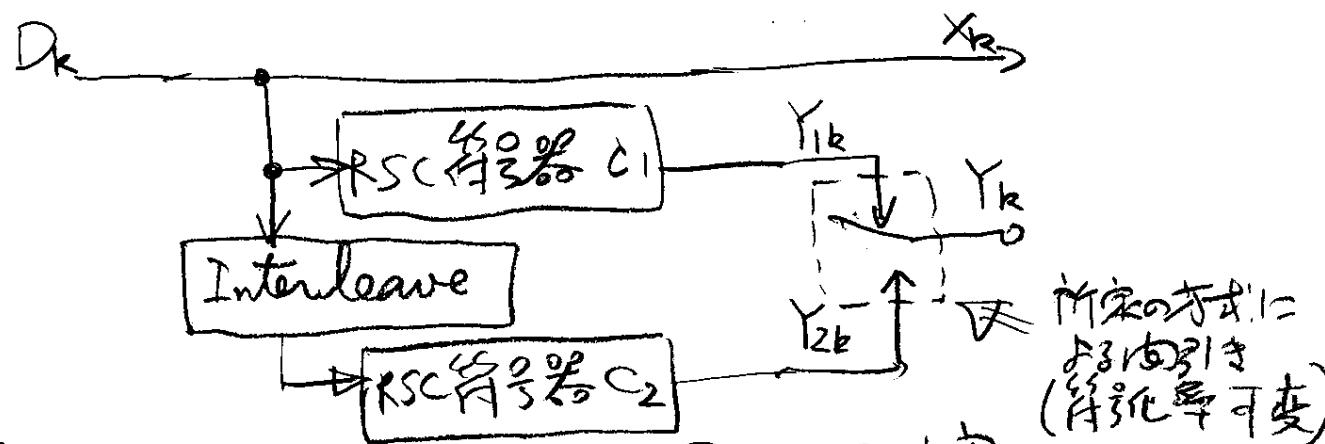
#### A. Construction of the Code

The use of systematic codes enables the construction of a concatenated encoder in the form given in Fig. 4, called *parallel concatenation*. The data flow ( $d_k$  at time  $k$ ) goes directly to a first elementary RSC encoder  $C_1$  and after interleaving, it feeds ( $d_n$  at time  $k$ ) a second elementary RSC encoder  $C_2$ . These two encoders are not necessarily identical. Data  $d_k$  is systematically transmitted as symbol  $X_k$  and redundancies  $Y_{1k}$  and  $Y_{2k}$  produced by  $C_1$  and  $C_2$  may be completely transmitted for an  $R = 1/3$  encoding or

(15)

## 4.2 Turbo 総号器

総号器の構成を下図に示す。



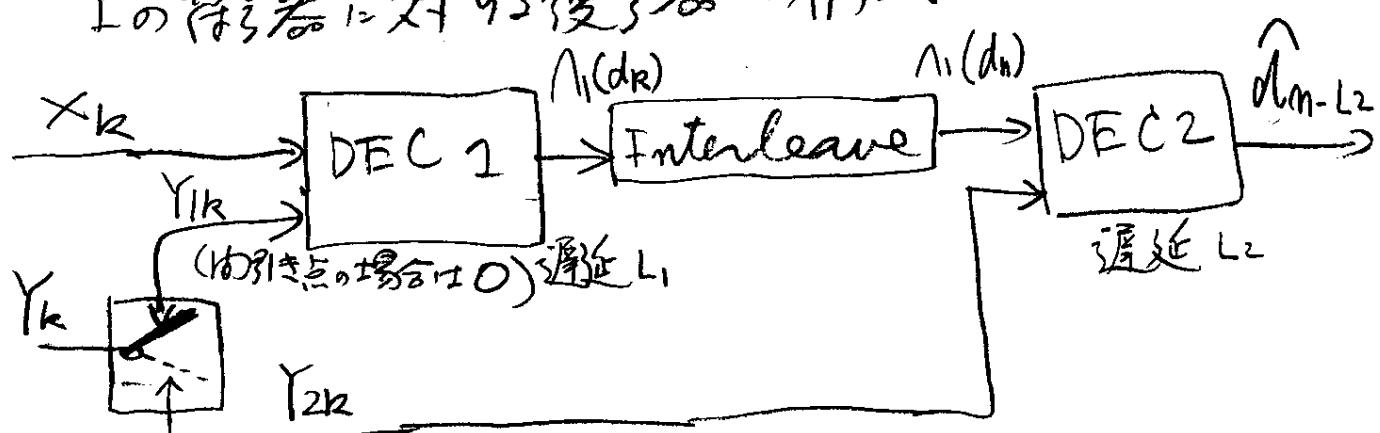
- (注) 総号器 C<sub>1</sub> と C<sub>2</sub> は同じものでも違うものでも良い。  
小さなずれ長いの簡単な総号器で良い。  
Interleave はできるだけ大きくして総号器 C<sub>1</sub> と C<sub>2</sub> を  
無相違にする。

### 総号の距離構造

例方 all 0 の場合で 0...010...0 の等間隔距離  
で 1だけ置いた場合は総号器の出力では総号器の  
帰還構造のため非常に大きな距離(1の数)となる。  
詳細は原論文参照の事。

## 4.3 Turbo 復号器

上の総号器に対する復号器の構成は次の図。



2段階の復号を行う。

(16)

#### 4.4. Turbo復号方法[1] APPの逐次計算

受信信号

各k番目の受信信号

$$R_k = (x_k, y_k)$$

$$\begin{cases} x_k = (2x_{k-1}) + i_k \\ y_k = (2y_{k-1}) + s_k \end{cases}$$

Noise

論理値

$$\begin{cases} x_k \\ y_k \end{cases} \quad \begin{cases} 0, \text{X} \\ 1, \text{Y} \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_k \\ y_k \end{cases} = -1 \alpha_1 + 1$$

- ① 対数尤度(Log likelihood Ratio, LLR)

DEC1の出力

$$\Lambda_1(d_k) = \log \frac{\Pr(d_k=1 / \text{observation})}{\Pr(d_k=0 / \text{---})}$$

$\approx \Pr(d_k/x)$  は受信系列の観察の結果求めた Posterior Probability (APP)

- ② 既知の初期状態と最終状態のブロック

符号器の初期状態  $S_0 = 0$  と最終状態  $S_N = 0$

なる大きな  $N$  のブロックに通信を設計 ( $\sim N \# = 2^m$ )

受信ブロックに対して復号を行うものとする。

受信信号  $R_k = (x_k, y_k)$  }  $k=0, 1, 2, \dots, N-1$

符号器の状態  $S_k(m)$

$$m = 0, 1, 2, \dots, 2^k-1 \quad (\text{ルビ表})$$

- ③ Turbo復号の復号法とは APPの計算をするなどに他ならぬ。

内部状態  $S_k = (a_k, a_{k-1}, \dots, a_{k-k+1})$  を決める。

受信系列  $R_1^N = (R_1, R_2, \dots, R_N)$ ,  $R_k = (x_k, y_k)$  を観測

[状態  $[S_k] = \{S_k(0), S_k(1), \dots, S_k(2^k-1)\}$ ] の遷移の APPを計算する

$$\lambda_k^i(m) = \Pr(d_k=i, S_k=m / R_1^N)$$

受信系列全体から  
k番目の内部状態が m で送信  
情報データは i (=0,1) である確率

決める

$$\Pr(d_k=i / R_i^N) = \sum_{m=0}^{2^k-1} \lambda_k^i(m)$$

$= 1 - A$  ボルトの本質がある。  
即ち  $d_k=0$  か  $1$  かをいきなり  
決めるこの確率を計算する。

LLR:

$$\Lambda(d_k) = \log \frac{\sum_m \lambda_k^i(m)}{\sum_m \lambda_k^o(m)}$$

後はLLR  $\Lambda(d_k)$  の計算法

$$\begin{aligned}\Lambda(d_k) &= \log \frac{\sum_{m} \sum_{m'} \Pr(d_k=1, S_k=m, S_{k-1}=m', R_1^{k-1}, R_k, R_{k+1}^N)}{\sum_{m} \sum_{m'} \Pr(d_k=0, \dots, \dots)} \\ &= \log \frac{\sum_{m} \sum_{m'} \gamma_i(R_k, m', m) \alpha_{k-1}(m') \beta_k(m)}{\sum_{m} \sum_{m'} \gamma_0(\dots) \dots}\end{aligned}$$

但し

$$\gamma_i(R_k, m', m) = \Pr(d_k=i, S_k=m, R_k / S_{k-1}=m')$$

$(S_{k-1}=m' \text{ が } 3 \text{ 条件付確率})$

逐次計算

$$\alpha_k(m) = \frac{\sum_{m'} \sum_{i=0}^1 \gamma_i(R_k, m', m) \alpha_{k-1}(m')}{\sum_m \sum_{m'} \sum_{i=0}^1 \dots} \quad (\text{過去からの影響})$$

$$\beta_k(m) = \frac{\sum_{m'} \sum_{i=0}^1 \gamma_i(R_{k+1}, m', m) \beta_{k+1}(m')}{\sum_m \sum_{m'} \sum_{i=0}^1 \dots} \cdot \alpha_k(m') \quad (\text{未来までの推測})$$

状態遷移確率

$$\gamma_i(R_k, m', m) = P(R_k / d_k=i, S_k=m, S_{k-1}=m').$$

- $\circ \gamma(d_k=i / S_k=m, S_{k-1}=m')$   $\bowtie$  Trellis
- $\circ \pi(S_k=m / S_{k-1}=m')$   $\bowtie$  構造決定

$$P(R_k / d_k=i, S_k=m, S_{k-1}=m')$$

$$= P(X_k / \dots)$$

$$\circ P(Y_k / \dots)$$

上に逐次計算を以下の条件の下で実行する。

初期条件  $\alpha_0(0)=1, \alpha_0(m)=0 \quad (m \neq 0)$

$$\text{且つ } \beta_N(m) = \frac{1}{N} \quad (m=0, 1, 2, \dots, 2^k-1)$$

## 4.5 Turbo 編碼の復號[2] 外部情報板の利用

組織符号(RSC)の特長から受信信号の一つは原データからのまま送信された  $X_k = d_k$  ものであるのでこれを利用する。

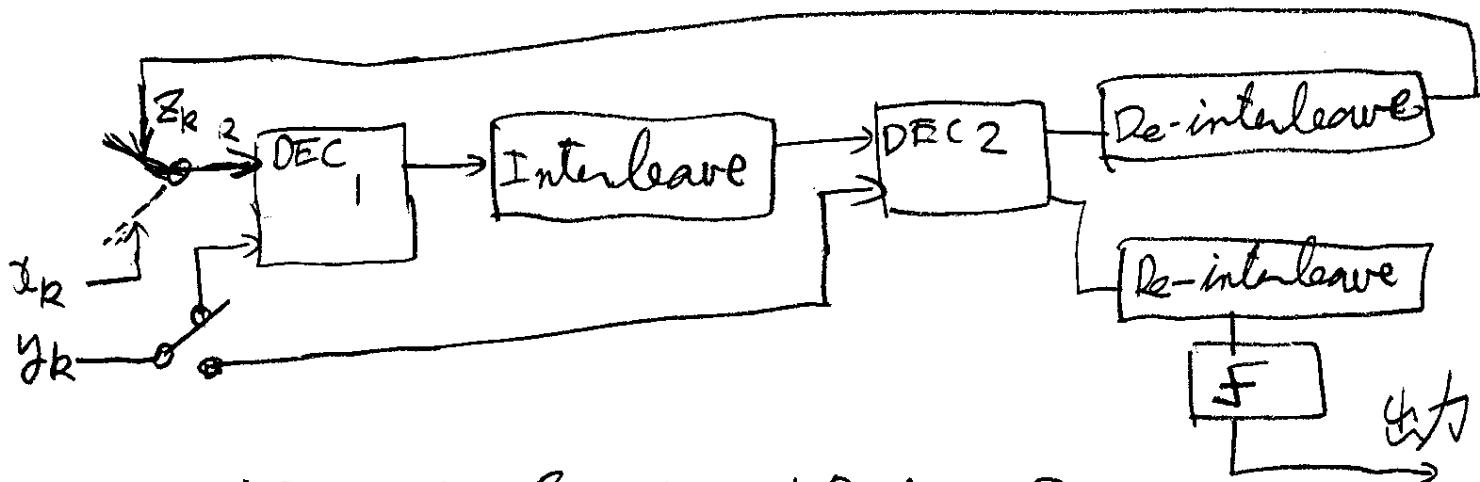
$$\begin{aligned} \Lambda(d_k) &= \log \frac{P(X_k/d_k=1)}{P(X_k/d_k=0)} + W_R \\ &= \frac{2}{\rho^2} Z_k + W_R \end{aligned}$$

ここで  $W_R$  は前述の LLR:

$$W_R = \log \frac{\sum_m \sum_{m'} g_1(y_k, m', m) \alpha_{k-1}(m') \beta_k(m)}{\sum_m \sum_{m'} g_0(\text{"'}) \text{"'}}$$

### ① くり返し計算法

復号器の出力  $Z_k$  が入力よりも正しい(復号の効果あり)時には上の  $Z_k$  の代わりに出力  $Z_k$  を帰還して用いれば更に改善が得られる筈である。



くり返しにより各  $\Lambda(d_k)$  が十分 1 未満

に近づく(平滑確率 APP が十分大)とされば最終的に 0 か 1 かの 2 進符号を出力する。

くり返しの効果を下図に示す。

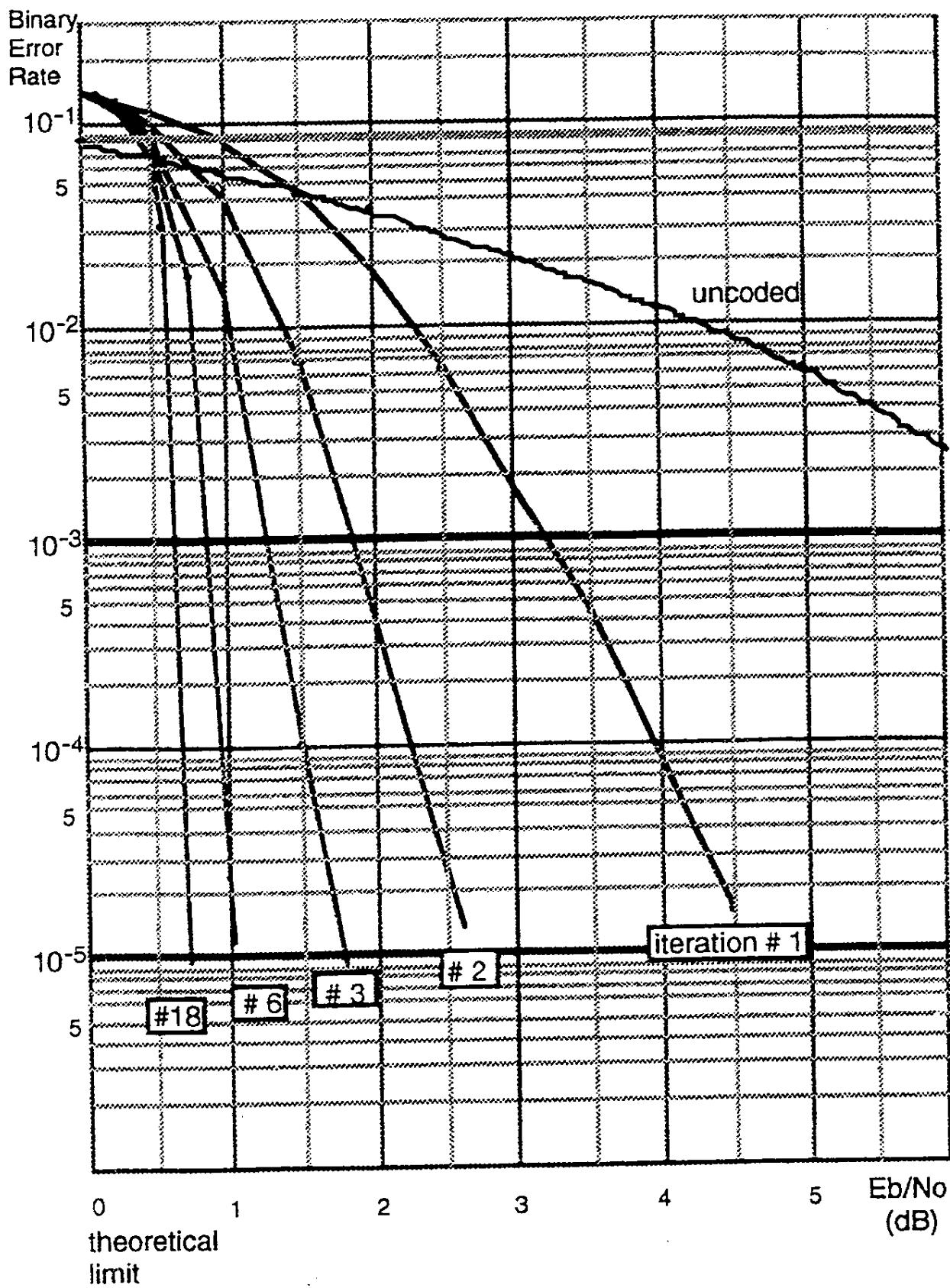


Fig. 9. BER given by iterative decoding ( $p = 1, \dots, 18$ ) of a rate  $R = 1/2$  encoder, memory  $\nu = 4$ , generators  $G_1 = 37, G_2 = 21$ , with interleaving  $256 \times 256$ .

### B. Interleaving

(20)

The interleaver is made up of an  $M \cdot M$  matrix and bits  $\{d_k\}$

## 5.まとめ

Viterbi復号法は1967年に提案されたが実用段階に入ったのは1980年代であった。その理由はACS即ち演算加算器に掌廻化されたにも拘らずViterbi復号法は約莫長Tに対して $2^k$ 倍でstate数が増大するためメモリと演算素子の発展に待つ所が大きかったからである。80年代にはマイコンの応用分野が急速に広かりメモリと演算素子の能力が飛躍的に向上して初めてViterbi復号法が容易に実現される様になり特に低C/I条件下動作する衛星通信を始めとして通信広く応用された。更にはHD等の情報機器に応用が広がっていった。

Viterbi復号法の特徴を改善するには約束長を増大させれば良いがstate数が $2^k$ で増大するの限界があるそこでReed-Solomon符号との組み合せによる連接符号(Concatenated Codes)が開発されShannon限界にも迫る特性を実現し直接衛星放送(DSB)等に広く応用されていく。

他の方向かこのTurbo符号であつてPPS約束長は小さくしてインターフォードにより今無相関化されたり2つの符号を重ねる方式であり連接符号にも相通するもこれを複数重ねてFeed backにより直し演算という独特の方式によりシャンソン限界に迫る。しかし演算量は膨大でViterbi復号法以上に演算及びメモリ技術の発展に依る点が大きい。技術は多くの分野が相互の交流を限り無く繰り返し発展する事の如きは。