行列式とその応用

市吉　修

１．　ｎ次元線形空間

ｎ個の独立な vector(大きさと向きを有するもの、矢印で表現すると便利)が形成する空間をｎ次元線形空間もしくはベクトル空間Ｖｎと呼ぶ。
Ｖｎにおいてはｎ個より多数のベクトルは独立ではあり得ない。即ち線形従属(Linear dependent)となる。

V[n+1] = C[1].V[1] + C[2].V[2] +;;;; + C[n].V[n]

{C[i] i=1,2,,,,n}は少なくとも一個は零でない定数。

シュミットの直交化法(Schmidt's orthogonalization algorithm)
Vn において任意に選んだｎ個のベクトル v[1],v[2],,,,v[n]は Schmidt の直交化法によりｎ個の正規直交規定(normalized orthogonal base) {e[1],e[2],,,,e[n]}を形成できる.

e[1] = v[1] /　｜v[1]｜
e[2] = {v[2]- <v[2],e[1]>.e[1]} /｜{v[2]-<v[2],e[1]>.e[1]}｜
e[3] = {v[3] – <v[3],e[2]>.e[2]- <v[3],e[1]>.e[1]}
　　/｜{v[3] – <v[3],e[2]>.e[2]- <v[3],e[1]>.e[1]}｜

以下同様。

ベクトルの内積
上において｜ｕ｜はベクトルｕの絶対値（大きさ）であり＜ｕ，ｖ＞はベクトルｕとｖの内積(inner product)あるいはスカラー積(scaler product)である。

<u,v> = ｜u｜.｜v｜.cos(θ[u,v])

ここでθ[u,v]はベクトルｕ，ｖのなす角である。
<u,v> = ０の時　θ[u,v])＝π／２となり、ｕとｖは直交すると言う。

正規直交系(normalized orthogonal system)
Schmidt の直交化法の結果得られる{e[i] ; i=1,2,,,,n }は正規直交基底(base)を成す。

＜ｅ［ｉ］，ｅ［ｊ］＞　　＝　１　（ｉ＝ｊ）
　　＝　０　（それ以外）

Ｖｎの任意のベクトルｖは次のように表現できる。

v = v(1).e[1] + v(2).e[2] +,,,,,,+ v(n).e[n]　= (v(1),v(2),,,,v(n))

但し

v(i)= <v,e[i]>

はベクトルｖの第ｉ成分(element,要素とも言う)である。

列(縦)ベクトルと行(横)ベクトル

v = <v] = (v(1), v(2), ,,,, v(n))

を行(横)ベクトルと呼び、これを縦に並べたものを列(縦)ベクトルと呼び[v>で表す。
ベクトルｕとｖの内積は

＜ｕ，ｖ＞　＝ <u].[v>

である。［ｕ＞＜ｖ］はベクトルの内積とは異なるので要注意。

<u,v> = u[1].v[1] + u[2].v[2] + ,,, + u[n].v[n]
<u,u> = u[1]^2 + u[2]^2 + ,,,, + u[n]^2 = ｜u｜^2

2　Vn における線形変換(Linear transformation)

Ｖｎにおけるベクトルｘに変換Ｔを加えてベクトルｙを得るものとする。

　　ｙ　＝　Ｔ（ｘ）

変換Ｔが線形(linear)であるとは任意の定数ｃ１，ｃ２とベクトルｘ１，ｘ２に対して

　　Ｔ（Ｃ１．ｘ１　＋　ｃ２．ｘ２）＝　ｃ１．Ｔ（ｘ１）　＋　ｃ２．Ｔ（ｘ２）

が成り立つ事である。

今ベクトルｘ

　　x = x(1).e[1] + x(2).e[2] + ,,,, + x(n).e[n]

に対して線形変換Ｔを加えると

　　y = T(x) = [i=1,n]∑ x(i).T(e[i])

T(e[i])はひとつのベクトルであるので正規直交基底で展開できる。

　　T(e[i]) = [j=1,n]∑ t[i,j] e[j]

故に

　　y = [j=1,n]∑ [i]∑ x(i).t[i,j] e[j]
　　= [j=1,n]∑ y(j).e[j]
　　y(j) = [i=1,n]∑ x(i).t[i,j]

これは次のように簡潔にかける。

　　y = x.T

行列(matrix)

ここでＴは行列(Matrix)でありその［ｉ，ｊ］要素を前記 t[i,j]とすると

　　T = [i,j=1,n]∑∑ [e[i]>.t[i,j].<e[j]]

これはＤｙａｄｉｃと呼ばれる二次元テンソルである。

ｘ．Ｔ　＝／＝　Ｔ．ｘ

前述の変換においてｘは

　　x = x(1).<1] + x(2).<2] + ,,,, + x(n).<n]

であった。ここで＜ｉ］は第ｉ番目の基底で横ベクトルである。

今Ｔ．ｘを行うにはｘを縦ベクトルの基底で表現すればよい。

　　Ｔ．ｘ　＝ [i,j,k =1,n]∑∑∑ x(k).t[i,j]. [i>.<j].[k>
　　=[i,j=1,n]∑∑ x(j).t[i,j]. [i>
　　y(i) = =[j=1,n]∑ t[i,j].x(j)

前述の結果と比べると行列とベクトルの乗算の順序を変えると結果が異なる。即ち

　　<x].T =/= T.[x>

ベクトルの集まりとしての行列

行列は前述のごとくＤｙａｄｉｃで表現できるが、演算の順序によって列(縦)ベクトルの集まりあるいは行(横)ベクトルの集まりとして扱う必要がある。

　　T = [i,j=1,n]∑∑ [i>.t[i,j].<j]
　　= [i=1,n]∑ [i>.<t(i)]　　(<t(i)]= [j=1,n]∑ t[i,j].<j])
　　= [j=1,n]∑ [t(j)>.<j]　　([t(i)>= [i=1,n]∑ t[i,j].[i>)

行列の積

k=1,2,,,m について <yk] = <xk].T が成立するものとする。

行ベクトルを列に並べた行列Y,Xは

$$Y = [k=1,n]\sum [k><yk] = [k=1,n]\sum [k><xk].T = X.T$$

ただし

$$<xk> = [l=1,n]\sum x[k,l].<l>$$

$$<yk> = [j=1,n]\sum y[k,j].<j>$$

とおくと

$$<xk>.T = [l=1,n]\sum [i,j=1,n]\sum\sum x[k,l].<l>.[i>.t[i,j].<j>$$

ゆえに

$$y[k,j] = [i=1,n]\sum x[k,i].t[i,j] \quad (k=1,2,,,,m)$$

一般にm=/= nであり Y,X はm x n行列　Tはn x n行列である。

３．　行列式

定義

前記行列Ｔの行列式(determinant) ｜Ｔ｜は次のように定義される。

$$|T| = [i(1),i(2),,,,i(n)]\sum \mathrm{sgn}(i(1),i(2),,,i(n)).t[1,i(1)].t[2,i(2)]...t[n,i(n)]$$

ここでsgn(i(1),i(2),,,i(n))は数列(i(1),i(2),,,i(n))の並びを一度に二個ずつ並び替える操作（互換）を繰り返して（１，２，，，ｎ）に置換(permutation)するのに偶数回の互換が必要ならば正、奇数回の互換が必要ならば負の符号をとる。置換の偶奇性は数列で一意的に決まる。

この定義から行列式は

（１）　各行ベクトルから一個の要素を選んで掛けた積t[1,i(1)].t[2,i(2)]...t[n,i(n)]に置換の符号sgn(i(1),i(2),,,i(n)をかけたものをすべての相異なるi(1),i(2),,,i(n)の組み合わせについて行い総和をとったものである。組み合わせの数はｎ！通りある。

（２）　上記であらゆる要素の組み合わせを取るので各列ベクトルから要素を選ぶとしても同じ値となる。

（３）　もしも行ベクトルの中に同じベクトル（定数倍は同じベクトル）があれば一回置換しても代わらないが、他方一回の置換で符号は逆になるので｜Ｔ｜＝－｜Ｔ｜,即ち｜Ｔ｜＝０となる。

（４）　ある行に別な行を加えてできる行列の行列式は元の行列式と等しい。

（５）　ある行ベクトルをk倍すると行列はk倍になる。

等の性質がある事が分かる。

ベクトル積

三次元ベクトル空間の基底ベクトルe[1],e[2],e[3]について

$$e[i] \times e[i] = 0 \quad (i=1,2,3)$$

$$e[i] \times e[j] = -\, e[j] \times e[i]$$

$$e[1] \times e[2] = e[3]$$

$$e[2] \times e[3] = e[1]$$

$$e[3] \times e[1] = e[2]$$

によってベクトル積あるいは外積を定義する。

二次元ベクトル積
ベクトルｕ，ｖを以下のように表現する。

```
u = r.cos(θ).e[1] + r.sin(θ).e[2]
v = ρ.cos(φ).e[1] + ρ.sin(φ).e[2]
```

ベクトル積

```
u x v = r.ρ.e[3].{cos(θ).sin(φ) - sin(θ).cos(φ)}
      = r.ρ.e[3].sin(φ-θ)
```

即ちベクトル積は二次元の範囲では定義できない。三次元空間で初めて完全に定義される。
ｕ ｘ ｖは大きさがベクトルｕ，ｖの張る平行四辺形の面積であり、向きはｕ，ｖに直交する。向きはｕからｖへ回転した場合の右ネジの進行方向である。
他方スカラー積は

```
u.v =(u,v) = r.ρ.cos(φ-θ)
```

である。

```
/u x v/^2 + /u.v/^2 = /u/^2 ./v/^2
```

二次元行列式
行列

```
T =   [1>.t[1,1].<1] + [1>.t[1,2].<2]
    + [2>.t[2,1].<1] + [2>.t[2,2].<2]
```

通常これは次のように幾何学的に表現される。

```
  =   [ t[1,1]  t[1,2] ]
      [ t[2,1]  t[2,2] ]
```

行列式は

```
|T|  =    | t[1,1]  t[1,2] |
          | t[2,1]  t[2,2] |
       = t[1,1].t[2,2] – t[1,2].t[2,1]
```

二次元ベクトル積と行列式
行列Ｔは二つの行ベクトル<t1],<t2]を列に(縦に)並べたものと見ることができる。

```
<t1] = t[1,1].<1] + t[1,2].<2]
<t2] = t[2,1].<1] + t[2,2].<2]
```

そこで

```
<t1] x <t2] = { t[1,1].t[2,2] – t[1,2].t[2,1] }.<3]
            = |T|.<3]
```

これはまた行列式で次のように表現できる。

```
            =   | 0        0      <3] |
                | t[1,1]  t[1,2]   0  |
                | t[2,1]  t[2,2]   0  |
```

三次元ベクトル積と行列式
二次元の場合と同様にして

```
<t1] = t[1,1].<1] + t[1,2].<2] + t[1,3].<3]
<t2] = t[2,1].<1] + t[2,2].<2] + t[2,3].<3]
```

のベクトル積は

```
<t1] x <t2] =   | <1]      <2]      <3]   |
                | t[1,1]   t[1,2]   t[1,3] |
                | t[2,1]   t[2,2]   t[2,3] |
```

となることを示すことができる。

三個の三次元ベクトル<t1],<t2],<t3]からなる行列Tの行列式を

```
|T| =        | t[1,1]  t[1,2]  t[1,3] |
            | t[2,1]  t[2,2]  t[2,3] |
            | t[3,1]  t[3,2]  t[3,3] |

    = t[1,1].e[1].  | e[1]     0       0    |
                    | t[2,1]  t[2,2]  t[2,3] |
                    | t[3,1]  t[3,2]  t[3,3] |
    + t[1,2].e[2].  |  0      e[2]     0    |
                    | t[2,1]  t[2,2]  t[2,3] |
                    | t[3,1]  t[3,2]  t[3,3] |

    + t[1,3].e[3].  |  0       0      e[3] |
                    | t[2,1]  t[2,2]  t[2,3] |
                    | t[3,1]  t[3,2]  t[3,3] |

    = ( <t1), <t2] x <t3] )
```

となる。
即ち三次元行列式とは三つのベクトル<t1],<t2],<t3]が作る立体の体積に他ならない。
内積と外積の定義から

```
    = ( <t2), <t3] x <t1] )
    = ( <t3), <t1] x <t2] )
```

n次元行列と行列式
三次元を拡張して一般のn次元ベクトル空間における行列と行列式を定義する。それにはn元ベクトルの内積と外積を定義すれば良い。
N個の単位ベクトル<1],<2],,,,,<n]が

内積

```
    ( <i],<j] ) = <i].[j>   = 1  (i=j)
                            = 0  (i=/=j)
```

外積

```
    <i] x <i] = 0
    <i] x <j] = - <j] x <i]
    <n] = <1] x <2] x <3] x ,,,,, x <n-1]
    <1] = <2] x <3] x ,,,,,,,,,,, x <n]
    <2] = <3] x <4] x ,,,,,,,,,,, x <1]
    ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,
    <n-1]= <n] x <1] x <2] x,,,,,, x <n-2]
```

n次元行列Tは

```
T   = [i,j=1,n]∑  [i>.t[i,j].<j]
    = [i=1,n]∑  [i>.<ti]
<ti] = [j=1,n]∑  t[i,j].<j]
```

行列式は

```
|T|= ( <t1), <t2] x <t3] x ,,,,, x <tn] )
```

となる。

4. |T.S|=|T|.|S|の証明

二次元の場合

T = [t[1,1] t[1,2]]　　　S = [s[1,1] s[1,2]]
　　[t[2,1] t[2,2]]　　　　　[s[2,1] s[2,2]]

直接計算により

|T.S| = | t[1,1].s[1,1]+ t[1,2].s[2,1]   t[1,1].s[1,2]+ t[1,2].s[2,2] |
　　　　| t[2,1].s[1,1]+ t[2,2].s[2,1]   t[2,1].s[1,2]+ t[2,2].s[2,2] |

= (t[1,1].s[1,1]+ t[1,2].s[2,1]).(t[2,1].s[1,2]+ t[2,2].s[2,2])
  - (t[1,1].s[1,2]+ t[1,2].s[2,2]).(t[2,1].s[1,1]+ t[2,2].s[2,1])
= (t[1,1].t[2,2] − t[1,2].t[2,1]).(s[1,1].s[2,2] − s[1,2].s[2,1])
= |T|.|S|

三次元の場合
二次元と同様に直接計算で証明できる。

一般のｎ次元の場合
行ベクトル<yi],<xi] (i=1,2,,,n)が行列Ｔで線形関係にあるとする。

<yi] = <xi].T　　(i=1,2,,,,n)

ここで<xi]を基底ベクトル{<j] (j=1,2,,,,n)}で展開すると

<xi] = x[i,1].<1] + x[i,2].<2] +,,,+ x[i,j].<j] +,,,+ x[i,n].<n]

そこで

<yi] = x[i,1].<t1] + x[i,2].<t2] +,,,+ x[i,j].<tj] +,,,+ x[i,n].<tn]

但し

<tj] = <j].T = t[j,1].<1] + t[j,2].<2] + ,,, + t[j,n].<n]

上の行ベクトル{<yi}, i=1,2,,,,n}, {<xi}; i=1,2,,,,n}の集まりはそれぞれ行列Y,Xを成し

Y = X.T

である。
そこで行列式

|Y|= (<y1), <y2] x <y3] x ,,, x <yn])
= x[1,1].[i(2),i(3),,,,i(n)]∑sgn(i(2),i(3),,,,i(n))
　.x[i(2),2].x[i(3),3].,,,.x[i(n),n]
　. (<t1), <t2] x <t3] x,,,,, x <tn])
+ x[1,2].[i(3),i(4),,,,i(n), i(1)]∑sgn(i(3),i(4),,,,i(n), i(1))
　.x[i(3),3].x[i(4),4].,,,.x[i(n),n].x[i(1),1)
　. (<t2), <t3] x <t4] x,,,,, x <tn] x <t1])
,,

+ x[1,n]. [i(1),i(2),,,,i(n-1)]∑sgn(i(1),i(2),,,,i(n-1))
　.x[i(1),1].x[i(2),2].,,,.x[i(n-1),n-1]
　. (<tn), <t1] x <t2] x,,,,, x <t(n-1)])

上のｔの内積はすべて等しく|T|である。
他方ｘの項は|X|の余因子(Co-factor)展開に他ならない。従って
= |X|.|T|

5 ｜T.S｜=｜T｜.｜S｜の応用

座標変換における体積要素の変換
今座標系(x(1),x(2),,,,x(n))と(y(1),y(2),,,,y(n)を考える。

$$y(i) = f[i](x(1),x(2),,,,x(n) \quad (i=1,2,,,,n)$$

なる関係がある。f[i]()はｘ座標(x(1),x(2),,,,x(n)からy(i)を定める関数である。

今微分関係式

$$dy(i) = [j=1,n]\sum \ \partial y(i)/\partial x(j).\ dx(j)$$

これは

$$[i>.dy(i) = \ [j=1,n]\sum[j=1,n]\sum \ [i>.\partial y(i)/\partial x(j).<j].[k>.\ dx(k)$$
$$= T.[j>.dx(j)$$

但し座標変換行列Ｔは

$$T = \ [j,i=1,n]\sum \ [i>.\partial y(i)/\partial x(j).<j]$$

行列

$$\begin{aligned} Y = [\ & dy(1) \quad 0 \quad 0 \quad ,,,,,,0\ ] \\ [\ & 0 \quad dy(2)\ 0\ ,,,,,,,0\ ] \\ [\ & ,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,,] \\ [\ & 0 \quad 0 \quad 0,,, \quad dy(n)] \end{aligned}$$

の行列式は

$$｜Y｜= dy(1).dy(2).,,,.dy(n)$$

同様に

$$｜X｜= dx(1).dx(2).,,,,.dx(n)$$

即ち

$$dy(1).dy(2).,,,.dy(n) = \ ｜T｜.dx(1).dx(2).,,,.dx(n)$$

関数行列式 Jacobian
上の｜T｜は関数行列式、Jacobian と呼ばれ J((y1),y(2),,,y(n))/(x(1),x(2),,,,x(n)))
と表記する。

例　直角座標と球座標
直交座標(x,y,z) ←→ (r,θ,φ)の関係

$$x = r.\sin(\theta).\cos(\varphi)$$
$$y = r.\sin(\theta).\sin(\varphi)$$
$$z = r.\cos(\theta)$$

Jacobian は

$$\begin{aligned} J((x,y,z)/(r,\theta,\varphi)) = & \begin{vmatrix} \sin(\theta).\cos(\varphi) & r.\cos(\theta).\cos(\varphi) & -r.\sin(\theta).\sin(\varphi) \\ \sin(\theta).\sin(\varphi) & r.\cos(\theta).\sin(\varphi) & r.\sin(\theta).\cos(\varphi) \\ \cos(\theta) & -r.\sin(\theta) & 0 \end{vmatrix} \\ = & \ r^2.\sin(\theta) \end{aligned}$$

故に体積要素は

$$dx.dy.dz = r^2.\sin(\theta).\ dr.d\theta.d\varphi$$

となる。

-完-