非線形増幅歪の補償と複素モデルによる解析

市吉 修
2018/11/3

あらまし

増幅器の非線形歪は通信回路の深刻な特性劣化をもたらす事がある。信号波形の振幅あるいは位相変動の激しいOFDM変調などは特に大きな影響を受けやすい。
非線形回路の線形等化法としてPredistortion方式が有効である[1,2]。この方式は通信回路の非線形特性を既知としてその逆特性を送信信号に加えて全体として等価的な線形回線を確保する技術である。
Predistortionを行うには予め通信回線の非線形特性を知る必要がある。そのためには非線形増幅器のモデル化が有効であり、振幅及び位相を簡単な数式で表すSalehモデルが広く使われている[1,2]。
Salehモデルは有効であるが振幅と位相特性を別個に簡単な数式で表す計算的なモデルであり物理的な意味が分かりにくい。更に帰還路の無い従来のpredistortion方式では通信路非線形性の経時変化に対応する事は困難である。そこで筆者は帰還路を設けて通信路の非線形を負帰還制御により補償する方法を考案した[3]。この方法は広汎な通信系の非線形特性に対応できると共に経時変化にも自動的に追随して補償を行う事ができる。この帰還制御型predistortion方式が利用できる場合には非線形通信路の線形等化問題は一般的に解決されるであろう。

しかしながら通信路の非線形性の把握のためにはなおそのモデル化が有効である。また上述の帰還路付きのpredistortion式linearizerの初期値設定のためにも非線形増幅器のモデルは必要不可欠である。
一般的には非線形回路の入出力特性をTaylor展開する解析法が用いられるがそれではAM/PMの解析ができない。そこで本稿においては増幅器の非線形特性を信号振幅によって変わる利得および遅延特性として捉える複素増幅器モデルを考案し解析を行った。ここで基本となる思想は信号成分が瞬時値ではなく所定の時間に渡る時間積分で定義される相互相関によって定義される事である。これにより非線形増幅器の出力は増幅された入力信号成分とそれとは無相関な歪成分に分けられる。
非線形増幅器に広く見られる特長は入力信号電力の増大と共に出力信号が飽和すると共に時間遅れが生じる事である。提案モデルはこの現象を元にしており物理的な特長がより明確である。実部と虚部の定数関係により種々の非線形特性を記述する事ができる。
さらに非線形歪成分の周波数スペクトルを求め、いくつかの混変調特性の性質を導き、スペクトル観測に基づいて非線形増幅器の特性を把握する方法を示した。
最後に増幅器の非線形性が生じる原因について考察する。|

1. 増幅器のモデル

振幅利得gの線形増幅器は入力x(t)に対して出力 y = g .x を出力する。ある標準入力xoに対する出力はyo = g .xo となる。 そこで y’ = y/yo,　x’ = x/xo とすると y’ = x’となる。 即ち線形増幅器は利得1の標準形に変換できる。そこで以後はy’,x’をy, x と表記して標準化解析を行う。

2. 増幅器特性の Taylor 級数展開

増幅器の出力 y と入力 x の関係を定める関数 y(x)が x について微分可能であれば Taylor 級数展開が可能である。

$y = x + a2.x^2 + a3.x^3 + ,,,,$

通信系において入力信号は一般に次の形式の変調搬送波信号である。

$x(t) = p(t).\cos(\omega c.t) - q(t).\sin(\omega c.t)$

ここで p(t),q(t)は変調信号であり時間 t の関数である。ωc は搬送波(carrier)の角周波数である。

一般的に実関数 x(t)は複素関数 X(t)の実部として表現できる。

$x = \mathrm{Re}\{X(t)\} = 1/2.(X + X^*)$

$X = c(t).e^{(j.\omega c.t)}$

但し　$c(t) = p(t) + j.q(t)$　　($j^2 = -1$)

であり X^*は X の複素共役である。

今 Taylor 級数展開の x^3 の項を計算する。

$x^3 = 1/8 (X^3 + 3X^2. X^* + 3X.X^{*2} + X^{*3})$

$= 3/4 \ |c|^2.x \ + 1/8 (X^3 + X^{*3})$

第二項は周波数が 3ωc、即ち三倍の高調波であり周波数 filter により除去される。

同様の計算を他の次数について行うと、元の周波数帯に落ちてくる出力成分があるのは奇数次数の項のみである事が分かる。通常は三次の項でじゅうぶんであり次の近似式が用いられる。

$y = x - \alpha.x^3$

ここで α は実定数である。

上の x と X の対と同様に出力に対しても実関数 y に対して複素関数 Y を想定する事ができる。

$y = \mathrm{Re}\{Y\}$

そうすると上述の結果から対象となる周波数帯域において増幅器は

$Y = X - \alpha |X|^2.X$

なる複素形式に表現できる。

3. 複素非線形増幅器

増幅器の非線形のために出力 y(t)は歪むが、それを以下のモデルで近似する。

$Y = (1-\alpha.|X|^2). X(t-\tau(|X|^2))$

即ち入力信号 X の振幅に応じて出力信号 Y の振幅が飽和すると共に時間遅延が生じる。

上の式を Taylor 展開して第一項のみ取ると

$Y = (1- \alpha. |X|^2) . \{X(t) - \tau(|X|^2)).dX/dt \}$

$= (1- \alpha. |X|^2). (1-j\omega c .\tau(|X|^2)).X$　　　　　(j は虚数単位; $j^2 = -1$)

となる。

遅延特性に関しては遅延の大きさが入力信号の振幅の 2 乗に比例するものと仮定する。即ち

$\omega c.\tau(|X|^2)) = \beta. |X|^2$　　(β は実定数).

と仮定すると

$$Y = (1-\alpha.|X|^2).(1-j\beta.|X|^2)).X$$

となる。

特に $\alpha.|X|$, $\beta.|X|$ が小さい場合には

$$Y = \{1-(\alpha+j\beta).|X|^2\}.X$$

と近似される。

これは前述の実関数モデルの複素関数への自然な拡張になっている。

4. 非線形増幅特性と混変調雑音

ここで信号の相関と電力についていくつかの定義を行う。

信号 X と Y の相互相関は次式で定義される。

$$(X,Y) = \int X(t).Y(t)^* \, dt$$

但し積分時間は単位時間 1 とする。

すると信号 X の自己相関は信号の電力となる。

$$Px = (X, X) = \int X(t).X(t)^* \, dt = \int |X(t)|^2 \, dt = <|X(t)|^2>$$

等と表記し、以下の分析に用いる。

上の非線形増幅器モデルを更に下のように変形する。

$$Y = \{1-\gamma.(\alpha+j\beta).<|X|^2>\}.X - (\alpha+j\beta).(|X|^2 - \gamma.<|X|^2>).X$$

ただし $<|X|^2>$ は ^2 の単位時間平均であり入力電力 Pi に他ならない。即ち

$$Y = \{1-\gamma(\alpha+j\beta).Pi\}.X - (\alpha+j\beta).(|X|^2/Pi - \gamma).Pi.X$$

第一項は出力希望波を表し、第二項は混変調雑音(inter-modulation noise)を表す。

今信号 X(t)と出力 Y の中の混変調成分は無相関でなくてはならないから

$$0 = (X, (|X|^2/Pi - \gamma).X) = \int |X|^4 \, dt / Pi - \gamma Pi = 0$$

$$\gamma = \int |X|^4 \, dt / Pi^2 = <|X|^4> / <|X|^2>^2$$

そこで出力信号は

$$Y = \{1-\gamma(\alpha+j\beta).Pi\}.X - \gamma(\alpha+j\beta).\{|X|^2/(\gamma.Pi) - 1\}.Pi.X$$

ここで改めて $\gamma(\alpha+j\beta)$ を $(\alpha+j\beta)$ と表記すると出力信号は

$$Y(t) = Yo(t) - Yn(t)$$

Yo(t)は信号成分、Yn(t)は混変調成分である。

$$Yo(t) = \{1-(\alpha+j\beta).Pi\}.X$$

$$Yn(t) = (\alpha+j\beta).(|X|^2/(\gamma.Pi) - 1).Pi.X$$

となる。

5. 振幅分布公式

上の混変調信号の電力は

$$(P_n(t), P_n(t))$$
$$= \left((\alpha+j\beta).\left(|X|^2 / (\gamma.P_i) - 1\right). P_i .X,\ \ (\alpha+j\beta).\left(|X|^2 / (\gamma.P_i) - 1\right). P_i .X \right)$$
$$= (\alpha^2+\beta^2).P_i^2. \left\{ \langle|X|^6\rangle /(\gamma.P_i)^2 - 2\langle|X|^4\rangle/(\gamma.P_i) + P_i \right\}$$
$$= \text{or} > 0$$

これが任意の γ について成立する条件から以下の振幅分布公式が得られる。

$$\langle|X|^4\rangle^2 \ \leq\ \langle|X|^2\rangle.\langle|X|^6\rangle$$

6. 利得飽和特性 (Saturation performances of amplifier gain)

信号成分の振幅利得 $A = Y_o(t)/X(t) = 1-(\alpha+j\beta).P_i = |A|.e^{j\phi}$

$$|A| = \sqrt{(1-\alpha.P_i)^2 + (\beta.P_i)^2}.$$
$$\phi = \arctan\{\beta.P_i / (1-\alpha.P_i)\}$$

となる。Pi が小さい時は $|A|=1, \phi=0$ であり線形増幅を行う。Pi が大きくなるにつれて出力信号の振幅利得は振幅値の変動 AM/AM と位相変動 AM/PM が生じる。

電力利得は

$$G = |A|^2 = (1-\alpha.P_i)^2 + (\beta.P_i)^2$$

電力利得 G は $P_i = \alpha/(\alpha^2+\beta^2)$にて極小となり極小値は $G = \beta^2 / (\alpha^2 + \beta^2)$となる。

位相変移 ϕ は Pi が小さい範囲では Pi に比例するが Pi が大きくなるにつれて非線形が更に顕著になり $P_i = 1/\alpha$ において $\pi/2$ (radian)に達する。

7. 入出力信号の電力特性

入力 X(t)に対する信号成分出力 Yo(t)は

$$Y_o(t) = \{1-(\alpha+j\beta).P_i\}. X$$

その電力は

$$P_o = \langle (Y_o(t), Y_o(t))\rangle$$
$$= \{(1-\alpha.P_i)^2 + (\beta.P_i)^2\}.P_i$$

ここで両辺に α を乗じると

$$\alpha.P_o = \{(1-\alpha.P_i)^2 + (\delta.\alpha P_i)^2\}.\alpha P_i$$

但し

$$\delta = \beta/\alpha$$

そこで

$$p_o = \alpha.P_o,\ \ p_i = \alpha.P_i$$

と表記すると,

$$G = P_o/P_i = p_o/p_i = (1-p_i)^2 + (\delta.p_i)^2$$

同様に AM/PM 特性も

$$\phi = \arctan\{\delta.P_i / (1-p_i)\}$$

として単一のパラメータ δ で記述される。

微分 $dp_o/dp_i = 0$ とおくと二つの極値が $p_i = 1/(2+\sqrt{1-3\delta^2}),\ 1/(2-\sqrt{1-3\delta^2})$

に生ずる。$3\delta^2=1$ の場合には両者は一致し、増幅器は飽和点がない。$\delta<1/\sqrt{3}$ の範囲では増幅器は飽和特性を示す。即ち最大出力を超えて入力電力を増加すると出力電力が却って減少する範囲がある。

飽和点（出力最大）

$pi = 1/(2+\sqrt{1-3\delta^2})$ に於いて

電力利得と位相回りは

$Gp = po/pi = 2/9 /(1+\delta^2) . \{1 + 3\delta^2 + \sqrt{1-3\delta^2}\}$

$\phi = \arctan \{\delta/(1+\sqrt{1-3\delta^2})\}$

飽和点の特性は各種の増幅器について

$\delta=0$;　$Gp = 4/9 = -3.5$ (dB)　and　$\phi = 0$　　(AM/PM 無し)

$\delta=1/2$;　$Gp = 2/5 = -4.0$ (dB)　and　$\phi = 18$ (deg)

$\delta=1/\sqrt{3}$;　$Gp = 1/3 = -4.8$ (dB)　and　$\phi = 30$ (deg)　(飽和特性無し)

8.　歪信号電力特性

$Pn = \langle (Pn(t), Pn(t))\rangle$

$= \langle |(\alpha+j\beta).(|X|^2 /(\gamma\langle|X|^2\rangle) -1). Pi .X |^2 \rangle$

$= (\alpha^2+\beta^2) .Pi^3 (-1 + \langle|X|^6\rangle.\langle|X|^2\rangle /\langle|X|^4\rangle^2)$

ここで

$pi = \alpha.Pi,$

$pn = \alpha.Pn$

$\varepsilon = \langle|X|^6\rangle.\langle|X|^2\rangle /\langle|X|^4\rangle^2$

とおくと

$pn = (1+\delta^2) (\varepsilon-1)pi^3$

となる。

出力歪信号電力は ε に依るがそれは入力信号の性質により決まる。
入力信号が無変調や MSK 変調のように振幅一定の場合には $\varepsilon=1$ であるから出力歪成分電力は 0 となる。

以下入力に二波の正弦波信号が入力される場合を考える。

$x = \cos(\omega 1.t) + \cos(\omega 2.t)$

$= 1/2.(X + X^*)$

$X = e^{(j\omega 1.t)} + e^{(j\omega 2.t)}$

$= \{e^{(j\omega d1.t)} + e^{(j\omega d2.t)}\}. e^{(j\omega c.t)}$

但し

$\omega d1 = \omega 1 - \omega c$

$\omega d2 = \omega 2 - \omega c$

である。

$|X|^2 = 2 + 2\cos\{(\omega d1 - \omega d2).t\}$

であるから計算すると

$\varepsilon = 5/3$

故に

$pn = 2/3(1+\delta^2)\, pi^3$

となる。

出力 NPR(Noise Power Ratio)は

$NPR = pn / po$

$= 2/3(1+\delta^2)\, pi^3 / [\{(1-pi)^2 + (\delta .pi)^2\} \cdot pi]$

これより以下の特長が見られる。

(1) 小振幅時には NPR は入力電力の二乗に比例する。

(1) 飽和点 $Pi = 1/(2+\sqrt{(1-3\delta^2)})$ に於いて

$NPR = (1+3\delta^2) / \{ (1-\sqrt{(1-3\delta^2)})^2 + \delta^2 \}$

各種の増幅器の型に対して

δ	pi	po	pn	NPR
0	1/3	4/27	2/81	1/6
1/2	2/5	4/25	4/75	1/3
$1/\sqrt{3}$	1/2	1/6	1/9	2/3

9. 非線形増幅器の周波数スペクトル特性

今入力信号が帯域幅 F (Hz)に渡って一定と仮定する。これは広帯域変調の単一波 (波形整形 filter の Roll-off 率が 0 に近い場合)もしくは非常に多数の等しい電力の変調波 (OFDM や SCPC 等)が増幅器に入力される場合に相当する。

入力信号は

$X(t) = c(t).e^{(\omega c.t+\theta)}$

出力信号は

$Y = X - \gamma' .|X|^2 .X$

ここで

$\gamma' = (\alpha + j\beta)/\gamma$

X(t)の Fourier スペクトル X(jω)の大きさを A とするとその Power Spectrum は

$|X(j\omega)|^2 = |A|^2 \quad (-F/2 < \omega < F/2)$

$= 0 \quad$ (それ以外)

入力信号の電力は

$Pi = |A|^2 . F$

他方 $|X|^2 .X$ の周波数スペクトルは

$Z(j\omega) = X(j\omega) @ X^*(j\omega) @ X(j\omega)$

但し $U(\omega) @ V(\omega)$ は畳みこみ積分である。

$$U(\omega) @ V(\omega) = \int U(\omega') . V(\omega-\omega').d\omega'/(2\pi)$$

周波数表示では

$$U(f) @ V(f) = \int U(f') . V(f-f').df' \qquad (\omega = 2\pi.f)$$

上の畳み込み積分を実行すると以下の結果が得られる。

$$
\begin{aligned}
Z(j\omega) / |A|^3 &= 0 && (f<-3F/2) \\
&= 1/2.(f+3F/2)^2 && (-3F/2 < \omega < -F/2) \\
&= -f^2 + 3F^2/4 && (-F/2 < \omega < F/2) \\
&= 1/2.(f-3F/2)^2 && (F/2 < \omega < 3F/2) \\
&= 0 && (f > 3F/2)
\end{aligned}
$$

これから以下の事が読み取れる。

(1) 非線形歪の周波数帯域は３倍に広がる。

(2) 混変調は帯域の中心(ω=0)が最大で、帯域の端(ω= +F/2, -F/2)が最小である。
その差は 20log(3/4/(1/2))= 3.5(dB)である。

(3) 帯域の端(ω= +F/2, -F/2)おいて信号成分の電力密度は$|A|^2$ (= Pi/(F) (Watt/Hz))であるのに対して非線形歪の電力密度は$|\gamma'|^2 . |A|^6 .F^4/4$ である。その差を D とすると

$$|\gamma'|^2 . |A|^6 .F^4/4 = |A|^2 / D$$

これより

$$|\gamma'|^2 = 4/D/(|A|^4 .F^4) = 4/D/Pi^2/ F^2)$$

dB 表記では

$$2[|\gamma'|] = 6 - [D] - 2[Pi] -2[F]$$

として$|\gamma'|$を求める事ができる。

更にその内容については

$$\gamma' = (\alpha + j\beta)/\gamma = \alpha/\gamma(1+j\delta)$$

信号の変調方式や AM/AM, AM/PM 特性の実測により求める事ができる。

10. 非線形性の原因

増幅器の型は千差万別であり一概には言えないがその原因としては回路の浮遊容量が信号電力の大きさに応じて変化する事が考えられる。浮遊容量を C とし増幅器の内部抵抗を r とすると増幅器の伝達周波数特性は

$$T = 1/(1+j\omega c.r.C)$$

となる。この容量 C が入力電力に応じて変化すれば非線形が生じる。

容量 C は

$$C = \varepsilon o.S/(d-u)$$

で与えられる。εo は真空の誘電率、S は容量電極の面積、d- u は容量電極間の距離である。

ここでｄは入力電力が無い場合の電極間隙でありｕは入力電力がある場合の縮小量である。

入力電力があると浮遊容量の電極に電荷ｑが溜り、その Coulomb 力により両電極は引き付けられるがその力は Hooke の法則に従う弾性力で平衡が保たれる。弾性率をｋとすると

$k.u = q.q/(d-u)^2/(4\pi.\varepsilon o)$

右辺は入力信号振幅の二乗$|x(t)|^2$に比例すると考えられる。また d>>u と考えられるのでｕは概ね$|x|^2$に比例すると考えられる。

以上の考察により浮遊容量Ｃは

$C = Co.(1+c.|x|^2)$ (c;定数)

これより増幅器の伝達特性は

$T = 1/(1+j.\omega c.r.C) = 1/(1+j.\omega c.r.Co.(1+ c.|x|^2))$

$= 1/(1+j.d. (1+ c.|x|^2))$ 　　　　($d=\omega c.r.Co$)

$= 1/\sqrt{\{1+d^2 + 2d.c.|x|^2 + d.c^2.|x|^4\}}. e^{-j.\arctan\{ d. (1+ c.|x|^2)\}}$

非線形特性に関係するものを表すと

$\sqrt{(1+d^2)}.T = 1/\sqrt{\{(1+f1.|x|^2 + f2.|x|^4)\}}. e^{-j.\arctan\{ d. (1+ c.|x|^2)\}}$

但し

$f1 = 2d.c/(1+d^2)$, 及び　$f2 = d.c^2/(1+d^2)$

このモデルの増幅器の非線形性は次のものになる。

AM/AM 特性

$|y|^2 = |x|^2 / (1+f1.|x|^2 + f2.|x|^4)$

AM/PN 特性

$\phi = - \arctan\{ d. (1+ c.|x|^2)\}$

参考文献

[1] Mohammad Mehdi Shammasi, S. Mostafa Safavi
"Performance of a predistorter Based on Saleh Model for OFDM Systems in HPA Nonlinearity"
Feb 19-22, 2012 ICACT2012

[2] Tien M. Nguen, James Yoh, Andrew S. Parker, Diana M.Johnson
" Modelling of HPA and HPA Linearization Through a Predistorter"
Obtained through the Internet

[3] 特開平 8-242263、　日本国特許庁　公開特許公報