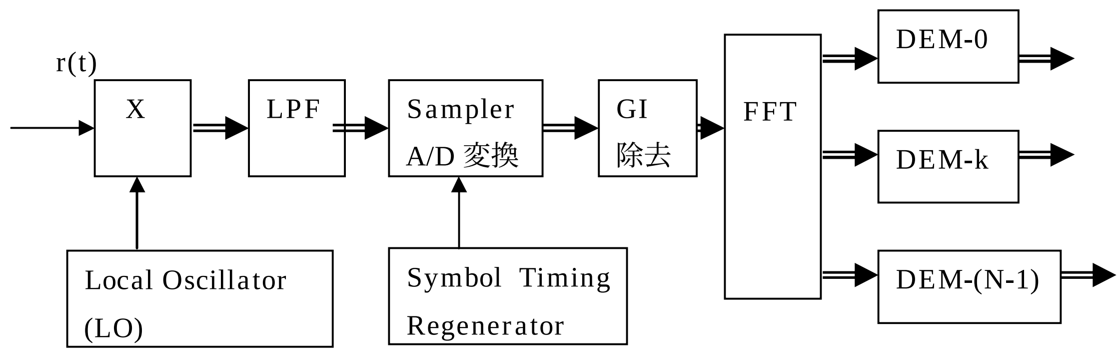
自主問学会 2009/02/11

FFT OFDM 復調における誤り率特性

市吉　修（二十一世紀を楽しく生きよう会）

1.　受信回路の構成



基本定数

サブチャネルの符号周期を T, OFDM 信号の FFT 点数を N, GI(guard interval)数を G とする。RF 帯での物理的な信号伝送速度は(N+G)/T (Baud)である。

受信信号

上図の LO によって Base band 帯に周波数変換された受信信号は

$r(t) = [k=0,N-1]\sum[n]\sum a(k,n).e^{j2\pi .k.\Delta f .(t- n.T)}.+ ni(t)$

ここで

T	;サブチャネルの symbol 周期
a(k,n)	;第 k チャネルの第 n 番目の変調データ
Δf	;サブチャネル周波数間隔
N	;総チャネル数
ni(t)	;雑音

T と Δf の関係は

$\Delta f .T = 1+G/N$

OFDM は周期 T ごとに独立に処理されるから以後特定の周期に着目して表現を簡素化する。

$r(t) = [k=0,N-1]\sum[n]\sum a(k).e^{j2\pi .k.\Delta f .t}.+ ni(t)$　　　($0 < t < T$)

帯域制限と標本化

上の基本定数から Nyquist 周波数(N+G)/T/2 であるから上図の LPF は[-(N+G)/T/2,(N+G)/T/2]に帯域制限するフィルタを用いる。実際の受信信号の帯域幅に応じて適当な Roll-off 率の Nyquist filter を用いる事ができる。標本化周期は T/(N+G)である。

標本化出力は

R(z) = [m=0,N+G-1] ∑R[m]. z^(-m)　　　　(z = e^(s.T/(N+G)))

R[m] = [k=0,N-1]∑{ a(k).e^{j2π.k.Δf .m.T/(N+G)} + ni(m) }

= [k=0,N-1]∑{ a(k).e^(j2π.k.m/N)+ ni(m) }　(m = 0,1,2,,,,N+G-1)

GI 除去

Guard Intrval の除去は標本化数 N+G 個の内先頭の GI 部分の G 個を捨て、残りの N 個を FFT に供給する。

FFT 入力信号

うえの過程を経て FFT に入力される信号は

R[m] = [k=0,N-1]∑{ a(k).e^(j2π.k.m/N) + ni(m) }　(m = 0,1,2,,,,N-1)

2. FFT 出力

FFT の第 k'出力は変数

W = e^(-j2π/N)

を用いて

Y[k'] = [m=0,N-1] ∑W^(k'.m) .R[m]

= [k=0,N-1]∑a(k) [m=0,N-1]∑W^{(k'-k).m} + [m=0,N-1] ∑W^(k'.m) .ni(m)

= N.a(k') + no

ここで

no = [m=0,N-1] ∑W^(k'.m) .ni(m)

即ち FFT の出力は信号振幅 N.a(k')に雑音 no が加わったものになる。

3.FFT 出力の S/N

出力雑音は平均　< no > = 0

二乗平均は　< │no│^2 > = < [m, m' =0,N-1] ∑∑W^(k'.(m-m')) .ni(m).ni(m')* >

= [m, m' =0,N-1] ∑∑W^(k'.(m-m')) . < ni(m).ni(m')* >

= [m, m' =0,N-1] ∑∑W^(k'.(m-m')) . <│ni│^2 >. δ(m,m')

= N. <│ni│^2 >

FFT 入力におけるチャネル k'の信号電力は　Psi(k') = │a(k')│^2 /T

雑音電力は　Pni = <│ni│^2 > /T

FFT 出力におけるチャネル k'の信号電力は　Pso(k') = N^2.Psi(k')

FFT 出力のチャネル k'における雑音電力は　Pno(k') = N.Pni(k')

従って入出力の S/N は　Pso/Pno = N.Psi/Pni

即ち S/N は N 倍改善される。

ここで受信 IF 信号の雑音電力スペクトル密度を No とすると標本化時の等価雑音帯域幅が (1+G/N)/T(Hz)であったので　Pni = (1+G/N).No/T

4.BER 特性

BPSK 変調の場合復調器出力は

信号振幅　　　; $xo = +Na$ または $-Na$,

雑音は　　　;平均が 0,

;分散が $\sigma n = \sqrt{(N)}.\sqrt{(<|ni|^2>)}$

信号と雑音が重畳された振幅分布は

$$Pr(x) = 1/\sqrt{(2\pi)}/\sigma n\ .e^{\{-(x-xo)^2/(2.\sigma n^2)\}}$$

誤り率は

$$Pe = [-\infty,0]\int Pr(x)dx = Q(xo/\sigma n)$$

但し Q(t)は誤差関数

$$Q(t) = 1/\sqrt{(2\pi)}[t,\infty]\int e^{(-t^2/2)}\,dt$$

そこでビット誤り率は

$$Pe = Q(xo/\sigma n) = Q(\sqrt{(N.a^2/<ni^2>)})$$

ここでチャネル k'の受信信号のビット当たりのエネルギーは　$Eb = a^2$

雑音電力はパーセバルの等式より　$Pni = <ni^2>/T = No.(1+G/N)/T$

これより　$<ni^2> = No.(1+G/N)$

故に BER は

$$Pe = Q(\sqrt{\{N.Eb/No/(1+G/N)\}})$$

BER 特性の解釈

上の公式は特定のチャネル k'について導いた。この時雑音は全帯域のフィルタを通過したものとして評価した。実際には特定のチャネルの占める帯域幅は全体の 1/N と見る事ができるので等価占有帯域幅で評価したら雑音が 1/N となる。他方全チャネルを用いて高速伝送を行う場合には時間 T における信号電力は上の N 倍となる。このように解釈すれば BER 公式は

$$Pe = Q(\sqrt{\{Eb/No\,/(1+G/N)\}})$$

となり Nyquist 伝送と同等の特性になるが GI による帯域拡張の分だけ劣化が生じる。