フーリエ解析概論

2006/7/30　市吉　修

１　フーリエ級数　Fourier series

有限な領域で定義された関数のフーリエ級数展開

ｘ（ｔ）の定義域を　－Ｔ／２＜ｔ＜Ｔ／２とする。

その定義域で関数系｛e^(i2πnt/T)　；n=0, +-1, +-2,,,,,｝による級数展開が成立する。

x(t)＝[n=-∞,∞]∑X(n) .e^(i2πnt/T)

ただし係数 X(n)は

Ｘ（ｎ）＝1/T .[-T/2,T/2]∫x(t) .e^(-i2πnt/T)dt

直交関数系

上の関係は関数系｛φ[n](t)= e^(i2πnt/T) ;　 n = 0, +-1, +-2,,,,｝

の性質を考えると分かり易い。

内積

関数ｕ（ｔ），ｖ（ｔ）　（　－Ｔ／２＜ｔ＜Ｔ／２）の内積を次式によって定義する。

（ｕ，ｖ）＝１／Ｔ．［-T/2, T/2］∫ｕ（ｔ）．ｖ＊（ｔ）ｄｔ

ただしｖ＊（ｔ）はｖ（ｔ）の複素共役である。

特にｕ＝ｖとおくと

（ｕ，ｕ）＝//u//^2 =　１／Ｔ．［-T/2,T/2］∫｜ｕ（ｔ）｜＾２ｄｔ

//u//をｕのノルム(norm)と呼ぶ。

正規直交関数系による級数展開

上述の関数系　｛φ[n](t)= e^(2πint/T) ;n =　0, +-1, +-2,,｝は正規直交系をなす。即ち

(φ[n](t),φ[m](t)) = 1 (m = n)

= 0 (m=/=n)

となる。

そうするとフーリエ級数とは

x(t) = [n]∑X(n).φ[n](t)

X(n)= (x,φ[n])

となる。🡸フーリエ級数は無限次元の Vector 空間に類似している。

Ｐａｒｓｅｖａｌの等式

//x//^2 = (x, x) = 1/T[-T,T]　∫/x(t)/^2dt = [n]∑/X(n)/^2

これは関数の時間軸表現 x(t)と正規直交関数系による級数展開表現の電力表現を示している。各成分は独立に電力（二乗平均）加算される。

２．　フーリエ変換 Fourier transform

上のフーリエ級数においてＴー＞無限大とする。
さらに関数 x(t) (-∞ < t < ∞)は次の条件を満足するものとする。

[-∞, ∞] ∫/x(t)/ dt < ∞ (無限積分が有限)

この時、

X(iω) = [-∞, ∞] ∫x(t).e^(- iωt) dt

をｘ（ｔ）のフーリエ変換 Fourier transform と呼ぶ。

<u>逆変換</u>

x(t) = 1/2π[-∞, ∞] ∫X(iω).e^(iωt) dω

フーリエ変換はフーリエ級数の変数定義域［－Ｔ，Ｔ］に対応させて考えると分かり易い。

Ｔ――＞∞,

2πn/T――＞ω

φ[n](t) = e^(2πint/T)　――＞　e^(iωt)　＝φ(ωt)

に対応する。

<u>内積</u>

(x, y) = [-∞, ∞] ∫x(t).y*(t) dt

//x//^2 = [-∞, ∞] ∫/x(t)/^2 dt　;エネルギー

<u>正規直交関係</u>

（φ(ωt), φ(ω’t) ）= [-∞,∞]∫e^(i(ω-ω’)t) dt = δ(ω-ω’)

また

＜φ(ωt), φ(ωt’)＞ = [-∞,∞]∫e^(i(ω(t-t’)) dω = δ(t-t’)

δ(t)はデルタ関数である。

<u>デルタ関数について</u>

デルタ関数は特殊な関数で歴史的には数学者間で激しい論争があった。次の様に考えると分かり易い。

δ(t) ＝[-∞, ∞] ∫e^(i(ωt)) dω

= [W→∞] [-W, W]∫e^(i(ωt)) dω

= [W→∞] W/π・sin(Wt) / Wt

と定義する。t＝０で∞、t=+-π/2W にて０，/t/>π/2W においては<u>平均的</u>に 0 なるかなり特殊な関数である。近似的には時間幅π/W、尖頭値 W/πのパルスと考えればよい。

更に積分∫δ(t) dt = 1 が成り立つ。

これより任意の連続関数 v(t)に対して次の式が成り立つことは直感的に明らかであろう。

∫v(t).　δ(t) dt = v(0)

演習 Exercises

<u>フーリエ級数　Fourier　Series</u>

次の関数をフーリエ級数展開せよ。

Expand　the　following　fubnctions　to Fourier series.

(1)　x(t) = cos(αt)　 (-T/2 < t < T/2)

(2)　y(t) = sin(αt)　 (-T/2 < t < T/2)

<u>フーリエ変換　Fourier　Transform</u>

[1] 次の関数のフーリエ変換を求めよ。

Calculate the Fourier transforms of the following functions.

(1)　x(t) = cos(αt)　　　(-T/2 < t < T/2)

=0　　　　　　　(otherwise)

(2)　y(t) = sin(αt)　　　(-T/2 < t < T/2)

=0　　　　　　　(otherwise)

(3)　x(t) = e^(-t^2)

[2] フーリエ変換について次の性質を証明せよ。

Prove the following roperties about Fourier Transfoms.

(1)X(jω) = [-∞,　∞]∫x(t)・e^(-jωt) dt

に対する逆変換が次式で与えられる事を示せ。

x(t) = 1/2π[-∞,　∞]∫X(jω)・e^(jωt) dω

(2) x(t) が実数ならば　If x(t) is real ,

X(jω)* = X(-jω)　　　但し z*は z の複素共役（complex conjugate）

(3) [-∞,　∞]∫/x(t)/^2 dt　=　1/2π[-∞,　∞]∫/X(jω)/^2 dω

（Parseval の等式）

(4) 内積

x(t),y(t)のフーリエ変換を X(jω) ,Y(jω)とする。時間軸上の内積を（ｘ，ｙ），周波数軸上の内積を＜Ｘ，Ｙ＞を次式で定義する。

(x,y) = [-∞,　∞]∫x(t)・y(t)* dt

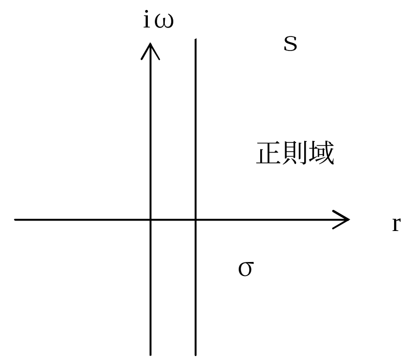
<X,Y> = 1/2π[-∞,　∞]∫X(jω)・Y(jω)* dω

(Y*; Complex conjugate of Y)

両方の内積が等しいことを示せ。

(x,y) = <X,Y>

３．ラプラス変換　Laplace transform



ラプラス変換

関数 v(t)が

$$[0,\infty]\int /v(t)/.e\hat{}(-\sigma t)\,dt < \infty$$

なる条件を満足するとする。

複素変数 $s = r + i\omega$ に対して

$$V(s) = [0,\infty]\int v(t).e\hat{}(-st)\,dt$$

を定義すると V(s)は Re s > σで絶対収束する。

ラプラス逆変換

$$1/2\pi i[\sigma - i\infty,\ \sigma + i\infty]\int V(s).e\hat{}(st)\,ds \quad = v(t) \quad (t > 0)$$

$$= 0 \quad (t < 0)$$

証明 Proof

左辺

$=1/2\pi i[\sigma - i\infty,\ \sigma + i\infty]\int\int v(t').e\hat{}(-st')\,dt'.e\hat{}(st)\,ds$

$= \int v(t')\,dt' \quad 1/2\pi i[\sigma - i\infty,\ \sigma + i\infty]\int e\hat{}\{s(t-t')\}\,ds$

$= \int v(t')\,dt' \quad 1/2\pi i[-\infty,\ \infty]\int e\hat{}\{(\sigma + i\omega)(t-t')\}\,di\omega$

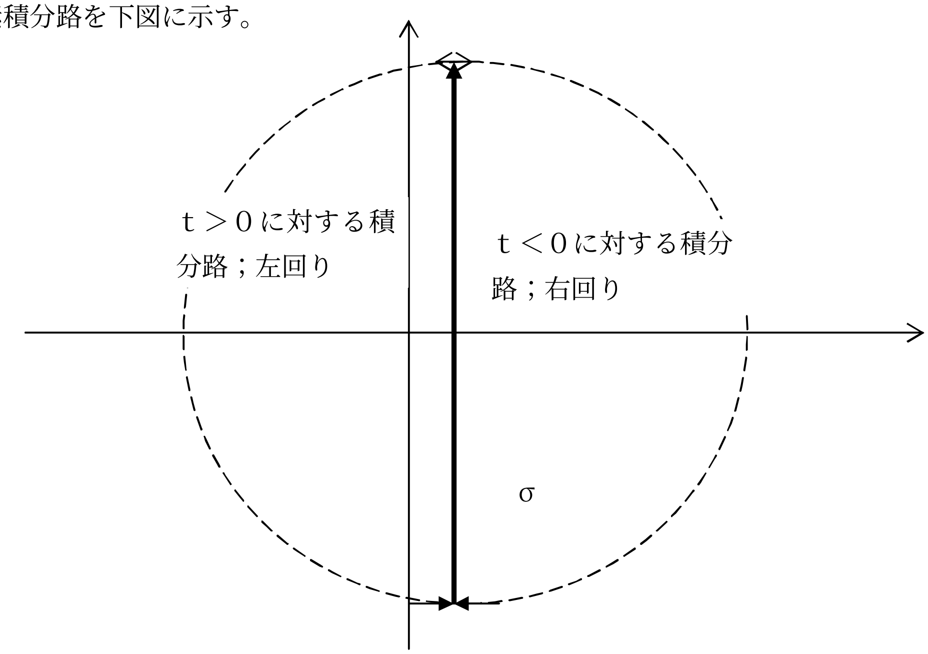
$= \int v(t')\,dt' \quad e\hat{}\{\sigma(t-t')\}\underline{1/2\pi[-\infty,\ \infty]\int e\hat{}\{i\omega(t-t')\}\,d\omega}$

$= \int v(t')\,e\hat{}\{(\sigma(t-t')\}\,.\,\delta(t-t')dt'$

$= v(t) \quad (t>0)$

$= 0 \quad (t<0)$

逆変換の複素積分路を下図に示す。



<u>インパルス応答</u>

$t = 0$ においてある線形系に入力信号としてデルタ関数（impulse）$\delta(t)$が加えられたとき

その出力を $g(t)$とすると因果律より

$$g(t) = 0 \quad (t<0)$$

となることは明らかである。

<u>伝達関数 Transfer function</u>

インパルス応答 $g(t)$の Laplace transform をその系の伝達関数と呼ぶ。

<u>畳み込み Convolution</u>

今インパルス応答が $g(t)$なる系に入力信号 $x(t)$ が入力される場合の応答を求めよう。

$$x(t) = [0,\infty]\int x(t').\delta(t-t')\,dt' \qquad (t >=0)$$

これは時間の流れ t とは瞬間$\delta(t-t')$の積分であるという思想を表している。

このとき出力 $y(t)$が次の畳み込み（Convolution）で与えられるのは当然であろう。

$$y(t) = [0,\infty]\int x(t').g(t-t')\,dt'$$

<u>畳み込み Convolution のラプラス変換</u>

$$Y(s) = X(s) .G(s)$$

証明

$$\begin{aligned} Y(s) &= [0,\infty]\int y(t).e\hat{}(-st)\,dt \\ &= [0,\infty]\int\int x(t').g(t-t')\,dt'.e\hat{}(-st)\,dt \\ &= [0,\infty]\int x(t').\ e\hat{}(-st')\,dt' .\ \underline{\int g(t-t').e\hat{}\{-s(t-t')\}dt} \\ &= G(s).\ [0,\infty]\int x(t').\ e\hat{}(-st')\,dt' \\ &= G(s).\ X(s) \end{aligned}$$

即ち時間関数としての畳み込み積分はラプラス変換では積となる。

これは実用的には極めて重要な性質である。

これによって伝達関数の意義が明確になる。下図参照。

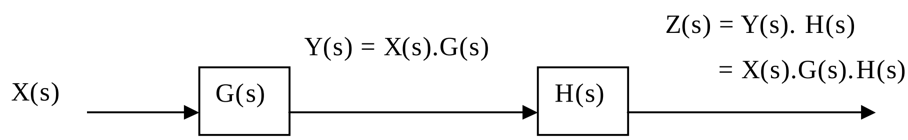
$$X(s) \longrightarrow \boxed{G(s)} \longrightarrow \quad Y(s) = X(s).G(s)$$

<u>G(s) = Y(s) / X(s)</u>

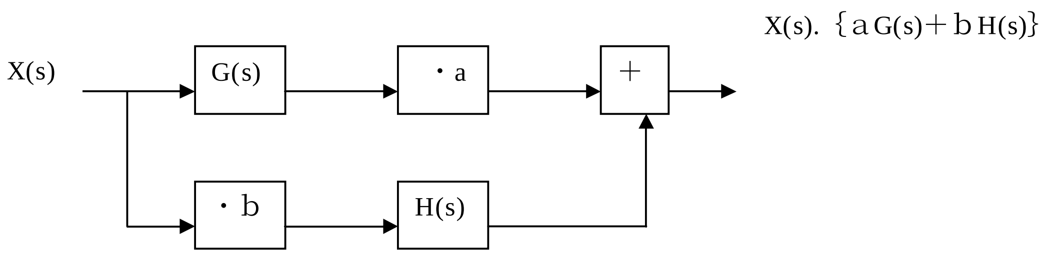
機能ブロック図

ラプラス変換を用いれば複雑な系をブロック図で設計する事が可能になる。

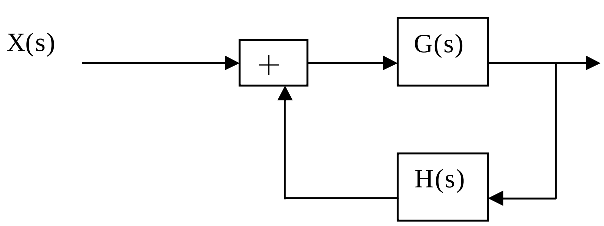
縦続接続



Feed-Forward



帰還 Feed-Back



Y(s) = G.(YH + X)

Y = X .G/(1-GH)

演算子 Operator

関数 v(t) (t > 0)のラプラス変換を V(s)とする。

積分

このとき関数[0,t]∫v(x) dx のラプラス変換は

[0,∞]∫e^(-st) .{ [0,t]∫v(x) dx} dt

= [0,∞]∫{e^(-st)/(-s)}' {[0,t]∫v(x) dx} dt　　　　　({ }' = d{}/dt)

部分積分法により

$= [e^{(-st)}/(-s).\ [0,t]\int v(x)\,dx]@[\infty-0] + (1/s)\ [0,\infty]\int e^{(-st)}\ v(t)\,dt$

$=(1/s).V(s)$

すなわち時間関数の積分操作はラプラス変換では 1/s を乗ずる動作になる。

<u>微分</u>

$v'(t) = dv/dt$ のラプラス変換は

$[0,\infty]\int e^{(-st)}\ .v'(t)\,dt$

$= [e^{(-st)}\ .v(t)]@[\infty-0] - [0,\infty]\int (-s)\ .e^{(-st)}\ .v(t)\,dt$

$= -v(0) + s.V(s)$

すなわち時間微分はラプラス変換においては s を掛ける操作に等価である。

これは実用的には極めて有用な性質であり、広汎な線形微積分系の動作は代数演算で解析できる。

<u>例</u>

次の微積分法廷式を解け。

$dy/dt + y + [0,t]\int y(\tau)d\tau = 1$

$y(0) = 0$

解

両辺のラプラス変換をとると

$sY - y(0) + Y + Y/s = X(s) \qquad (x(t) = 1(t>1))$

$Y(s+1+1/s) = y(0) + X(s)$

$Y(s) = X(s)/ (s+1+1/s)$

ここで

$X(s) = [0,\infty]\int e^{(-st)}\ .1\,dt = 1/s$

故に

$Y(s) = 1/(s^2 + s + 1)$

$= 1/\{(s-\alpha).(s-\beta)\}$

ただし

$\alpha = -1/2 + iR(3)/2$

$\beta = -1/2 - iR(3)/2 \qquad (R(3) = 3^{(1/2)})$

故に

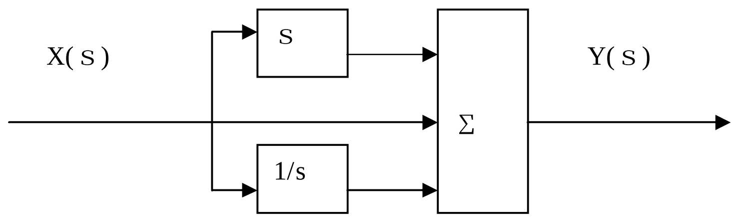
$y(t) = 1/2\pi i\ [-i\infty, i\infty]\int 1/\{(s-\alpha).(s-\beta)\}\ .e^{(st)}\,ds$

$= \mathrm{Res}(\alpha) + \mathrm{Res}(\beta)$　（留数、Residue）

$=\{ e^{(\alpha t)} - e^{(\beta t)}\}/(\alpha-\beta)$

= 2/R(3) .e^(-t/2) . sin(R(3)/2.t)

伝達関数表現



問題

上の系において入力が次の場合の出力応答を求めよ。

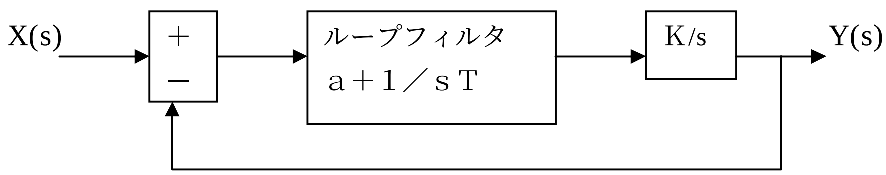
x(t) = δ(t) ; Impulse response

x(t) = u(t) (=1 for t>0, 0 for t<0) ; Step response

x(t) = t (t>0, 0 for t<0) ; Ramp response

問題

（１）次の伝達関数 H(s)を求めよ。



（２）標準形に変換せよ。

Y/X = H(s) =(2ζ.ωn.s +ωn^2) / (s^2 + 2ζ.ωn.s +ωn^2)

（３） H(s)の極（分母＝０となるｓ）を求めよ。

（４）伝達関数の極が

ａ．２複素根

ｂ．２実根

ｃ．重根

を持つ場合についてインパルス応答、ステップ応答、ランプ応答を求めよ。

4. Ｚ変換

<u>標本化 Sampling</u>

コンピュータで処理を行うには対象となる信号を適当な時間間隔で標本化することが必要不可欠である。時間間隔を T とする。対象信号を v(t)とすると標本系列 vs(t)は

vs(t) = [n]∑v(nT).δ(t-nT)

そのラプラス変換は

Vs(s) = [n]∑v(nT).e^(-nTs)

<u>Ｚ変換</u>

そこで

z = e^(sT)

とおくと

V(z) =　[n]∑v(n).z^(-n)

ただし

v(n) = v(nT)

である。すなわちｎ番目の標本値である。

<u>収束域</u>

上の V(s)の収束半径をσとする。即ち Re(s) > σにおいて V(s)は絶対収束する。

これに対応してＺ変換の収束域は

/z/ = e^{Re(s)T > e^(σ.T)

実用的には殆どの場合安定な線形系を扱うので V(s)の極は Re(s) < 0,左半平面にある（右半平面には無い）。即ちσ＝０，Ｚ変換の収束域は/ｚ/＞１となる。以下この場合について解説する。

<u>逆変換</u>

v(n) = 1/2πi[/z/=1]∫V(z).z^(n-1) dz

これは

1/2πi[/z/ =1]∫z^m dz　= 1　　　(m=-1)

　　　　　　　　　　　 = 0　　　(m=/=-1)

より明らかである。

<u>Ｚ変換の周期性</u>

z(s) = e^(sT)

任意の整数ｋに対して

$$z(s+k2\pi i/T) = z(s)$$

であるから

$$V(z(s+k2\pi i/T)) = V(z(s))$$

即ちＺ変換は元のｓ平面で考えると周期 $2\pi i/T$ の周期関数である。

<u>Ｚ変換の周波数スペクトル</u>

前述の標本化列

$$vs(t) = [n]\sum v(nT).\delta(t-nT)$$
$$= v(t) . [n]\sum \delta(t-nT)$$

第二因子をフーリエ級数展開すると

$$[n]\sum \delta(t-nT) = 1/T .[k]\sum e\text{\textasciicircum}(k2\pi it/T)$$

即ち標本化周波数 1/T の無限個の整数倍(k=0, +-1, +-2, ,,,)高調波よりなる。

$$[0,\infty] \int\{v(t) . e\text{\textasciicircum}(k2\pi it/T)\} .e\text{\textasciicircum}(-st)\, dt = V(s- k2\pi i/T)$$

であるから標本化列の周波数スペクトルは

$$V(z(s)) = 1/T . [k]\sum V(s- k2\pi i/T))$$

特にｓ＝ｉωと置くと

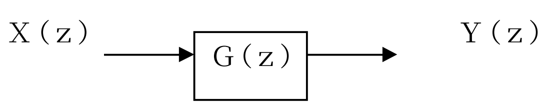
$$V(z(i\omega)) = 1/T . [k]\sum V(i(\omega- k2\pi /T))$$
$$= 1/T . [k]\sum V(2\pi i(f- k/T))$$

但しｆは周波数（Ｈｚ）である。

即ち周期Ｔの標本系列の周波数スペクトルは元の連続信号の周波数スペクトルを標本化周波数 1/T の無限個の整数倍(k=0, +-1, +-2, ,,,)だけずらして加算するものになる。

＝＞これより標本化定理を証明せよ。

<u>伝達関数</u>



インパルス応答

$$G(z) = [k=0,1,2,,,]\sum g(k).z\text{\textasciicircum}(-k)$$
$$g(t) = [k=0,1,2,,,]\sum g(k).\delta(t - kT)$$

従って入力

$$x(t) = [n]\sum g(n).\delta(t -nT)$$

に対する応答は

$$y(t) = [n]\sum g(n). [k=0,1,2,,,]\sum g(k).\delta(t - kT -nT)$$

となる。

ｋ＋ｎ＝ｍとおくと

$$y(t) = [m]\sum \{[k=0,1,2,,,]\sum x(m-k).\ g(k)\}\ .\ \delta(t - mT)$$

上の｛　｝の部分を標本系列ｘとｇの畳み込みと呼ぶ。

Ｚ変換では

$$Y(z) = [n]\ [k=0,1,2,,,]\sum\sum g(n).\ g(k).z\hat{}(-k-n)$$

$$= G(z).X(z)$$

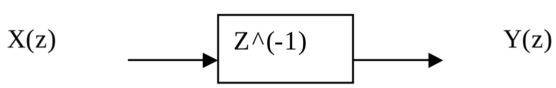
従ってラプラス変換と同様にブロック図によるシステム設計が可能となる。

$$Y(z) = [n]\ [k=0,1,2,,,]\sum\sum g(n).\ g(k).z\hat{}(-k-n)$$

$$= [m]\sum \{\sum[k=0,1,2,,,]x(m-k).\ g(k)\}\ .z\hat{}(-m)$$

<u>回路例</u>

遅延回路



$X(z) = [n]\sum x(n)\ z\hat{}(-n)$　　　　　　　　　　$Y(z) = [n]\sum y(n)\ z\hat{}(-n)$

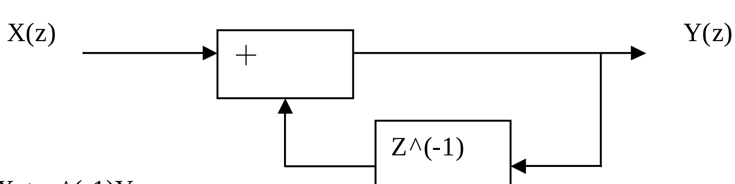
遅延回路の動作は

$y(n) = x(n-1)$

故に

$$Y(z) = [n]\sum x(n-1)\ z\hat{}(-n) = z\hat{}-1\ .\ [n]\sum x(n-1)\ z\hat{}(-(n-1)) = z\hat{}(-1)\ .X(z)$$

積分回路



$Y = X + z\hat{}(-1)Y$

➔ $Y = X/(1 - z\hat{}(-1))$

インパルス応答

$X(z) = 1$

$Y(z) = 1/(1 - z\hat{}(-1)) = 1 + z\hat{}(-1) + z\hat{}(-2) + z\hat{}(-3) +,,,,$

ステップ応答を求めよ。

$X(z) = 1/(1 - z\hat{}(-1))$

$y(n) =$

5 離散フーリエ変換　ＤＦＴ

有限項の標本系列のＺ変換

$$V(z) = [n=0,1,2,,,N-1]\sum v(n).z^{(-n)}$$

$$z = e^{(sT)}$$

周波数特性は

$$s = i\omega$$

とおく事により、

$$V(z(i\omega)) = [n=0,, N-1]\sum v(n).e^{(- i\omega T)}$$

ここでωは連続量であるのでＮ個の標本系列は時間的には離散系列であるが、周波数的には連続スペクトルを成している。

離散フーリエ変換　ＤＦＴ

ディジタル計算においては連続スペクトルを算出するのは不可能である。そこでいくつかの周波数を選択して離散的なスペクトルを計算する。

周波数としては以下の点を求めるものとする。

$$\omega[k] = k\,.\ \Delta\omega \qquad (k = 0,1,2,,,,N-1)$$

$$\Delta\omega = 2\pi/NT$$

これより

$$V(k) = V(z(i\omega[k])) = [n=0,,N-1]\sum v(n).e^{(- i\, kn\, 2\pi/N)}$$

$$V(k) = [n=0,,N-1]\sum v(n).W^{(kn)} \quad (k=0,1,2,,,,N-1)$$

$$W = e^{(- i2\pi/N)}$$

これを離散フーリエ変換　Discreet Fourier transform(ＤＦＴ)と呼ぶ。

逆変換ＩＤＦＴ

$$v(n) = 1/N \quad [k=0,,N-1]\sum V(k).W^{(- kn)} \qquad (n=0,1,2,,,,N-1)$$

証明

$$\text{右辺}= 1/N \quad [k=0,,N-1] \ \sum\{ [l=0,,N-1]\sum v(l).W^{(kl)}\}.W^{(- kn)}$$

$$= 1/N\ .\ [l=0,,N-1]\sum v(l)\ \{ [k=0,,N-1] \ \sum W^{(k(l-n))}\}$$

$$= v(n)$$

なぜなら変数Wについて

$$[k=0,,N-1]\sum W^{(- km)} = 1+ W^{(-m)} + W^{(-2m)} +,,,,+ W^{(-(N-1)m)}$$

$$= \{1-W^{(-Nm)}\}/\{1 - W^{(-m)}\} \quad = N \ (m=0)$$

$$= 0 \ (m{=}/{=} 0)$$

6. 高速フーリエ変換

高速フーリエ変換(Fast Fourier Transform, FFT)はＤＦＴの効果的な計算法である。
一種の二分岐法であり標本数はN＝２＾ｎにとる。

<u>ＤＦＴ</u>

V(k) = [n=0,,N-1]∑v(n).W^(kn)　(k=0,1,2,,,,N-1)

を一つ一つ計算するとＤＦＴとしては複素乗算と加算をＮｘＮ＝Ｎ＾２回行う必要がある。
Ｎ＝１００ならばｎ＾２＝１０，０００回の複素演算が必要となる。

<u>時間間引き法(Time decimation method)</u>

V(k) = [n=0,,N-1]∑v(n).W^(kn)
　= [n'=0,1,2,,,N/2-1]　∑v(2n').W^(k2n') +　∑v(2n' +1).W^(k(2n' +1))
　= [n'=0,1,2,,,N/2-1]　∑v(2n').W^(k2n') +　W^k .　∑v(2n' +1).W^(k2n')

これを次の二つのグループに分ける。

V(k) = 　[n'=0,1,2,,,N/2-1]　∑v(2n').W^(k2n') +　W^k .　∑v(2n' +1).W^(k2n')
V(k+N/2) = [n'=0,1,2,,,N/2-1]　∑v(2n').W^(k2n') -　W^k .　∑v(2n' +1).W^(k2n')
　(k= 0,1,2,,,N/2 -1)

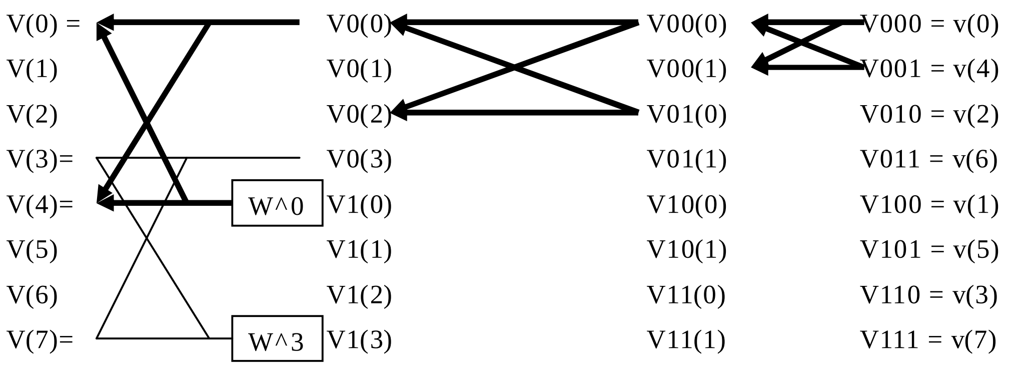
これを良く見ると V(k)と V(k+N/2)を同時に計算できることが分かる。

[n'=0,1,2,,,N/2-1]∑v(2n').(W^ 2)^(kn')　= V0(k)
[n'=0,1,2,,,N/2-1]∑v(2n'+1).(W^ 2)^(kn') = V1 (k)　(k=0,1,2,,,N/2-1)
とおくと
　V(k)　= V0(k) + W^k. V1(k)
　V(k+N/2)　=V0(k) – W^k .V1(k)　(k= 0,1,2,,,N/2-1)
ここで V0(k), V1(k)は W' = W^2 で標本数が N/2 の小型ＤＦＴであるから同様に分解できる。
　V0(k)　= V00(k) + W^(2k) . V01(k)
　V0(k+N/4) = V00(k) – W^(2k) . V01(k)　(k=0,1,2,, ,N/4-1)
および
　V1(k)　= V10(k) + W^(2k) . V11(k)
　V1(k+N/4) = V10(k) – W^(2k) . V11(k)　(k=0,1,2,, ,N/4-1)
ただし

V00(k) = [n=0,1,2,,,N/4-1]　∑v(4n).(W^ 4)^(kn)
V01(k) = [n=0,1,2,,,N/4-1]　∑v(4n+2).(W^ 4)^(kn)
V10(k) = [n=0,1,2,,,N/4-1]　∑v(4n+1).(W^ 4)^(kn)
V11(k) = [n=0,1,2,,,N/4-1]　∑v(4n+3).(W^ 4)^(kn)

以下同様に二分岐法を繰り返す。
毎回ＤＦＴの大きさは半分になるからｎ（Ｎ＝２＾ｎ）段目には只一個のデータとなる。

Ｎ＝８＝２＾３の場合について実例を示す。
簡単のためバタフライ（チョウチョの形の演算）の一部のみ表記する。



（ビット逆順）

各段においてＮ／２回のバタフライ演算を行う。
複素乗算と加算の数はＮ回である。
これが Log[2](N)段あるから必要な複素乗算の回数はＮ．Log(N)回となる。
これは個別ＤＦＴ計算に必要な演算回数Ｎ＾２にたいしてＮが大きくなると桁違いに少ない回数の演算でＤＦＴが実行できることを意味する。

周波数間引き法(Frequency Decimation Method)

V(k) = [n=0,,N-1]∑v(n).W^(kn)
　　= [n=0,1,2,,,N/2-1]　∑v(n).W^(kn) +　∑v(n+N/2).W^(k(n+N/2))
　　= [n=0,1,2,,,N/2-1]　∑v(n).W^(kn) + (-1)^k∑v(n+N/2).W^(kn)

ここでｋを偶数と奇数に分ける。
V(2k)　　= [n=0,1,2,,,N/2-1]　∑{v(n) + v(n+N/2)}.W^(2kn)　　= V0(W^2)
V(2k+1) = [n=0,1,2,,,N/2-1]　∑{v(n) - v(n+N/2)}.W^n.W^(2kn) = V1(W^2)
(k=0,1,2,,,N/2-1)

$g0(n) = v(n) + v(n+N/2)$

$h0(n) =\{ v(n) - v(n+N/2)\} . W\hat{}n$

とおくと、

$V0(W\hat{}2) = [n=0,1,2,,,N/2-1]\ \sum g0(n) .((W\hat{}2)\hat{}kn)$

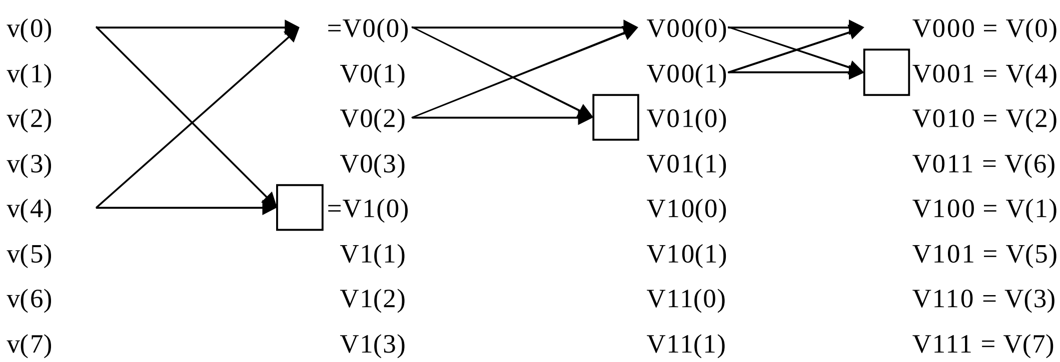
$V1(W\hat{}2) = [n=0,1,2,,,N/2-1]\ \sum h0(n) .((W\hat{}2)\hat{}kn)$

$(k=0,1,2,,,N/2-1)$

上の事から分かるように V(2k), V(2k+1) (k=0,1,2,,,N/2-1)を同時に計算できるところが高速演算が可能な理由である。

V0(W^2), V1(W^2)はそれぞれ項数がＮ／２のＤＦＴであるから同様の二分割が可能である。

以下同様の過程を繰り返していけば各段でＤＦＴの大きさは半分になるのでやがて一個になればそれ以上の分割はできない。段数は Log[2](N)となる。



以上から分かるように時間間引き法と周波数間引き法は密接な関係がある。

これは

ＤＦＴの定義

$V(k) = [n=0,,N-1]\sum v(n).W\hat{}(\ kn)$　　　　　$(k=0,1,2,,,,N-1)$

$v(n) = 1/N\quad [k=0,,N-1]\sum V(k).W\hat{}(-\ kn)$　　　　$(n=0,1,2,,,,N-1)$

$W = e\hat{}(-\ i2\pi/N\ )$

から分かるように時間変数ｎと周波数変数ｋとは全く対称的であることに由来する双対関係にある。

問題

標本数が２のべき乗でない場合にＦＦＴを適用するにはどうすればよいか。