

複素関数論の概要

1 複素数

直交座標表示

$$z = x + i y$$

x, y は実数、 i は純虚数

$$i^2 = -1$$

x ; 実部 Real part

y ; 虚部 Imaginary part

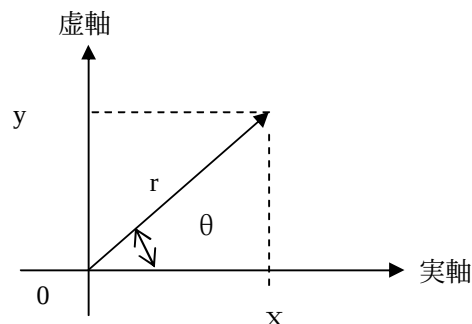
極座標表示

$$z = r \cdot \Theta(\theta)$$

$$|\Theta(\theta)| = 1$$

r ; 絶対値 Absolute value

θ ; 偏角 Argument



$\Theta(\theta)$ の導出

$$r^2 = x^2 + y^2$$

$$x = r \cdot \cos(\theta)$$

$$y = r \cdot \sin(\theta)$$

$$z = r \cdot \Theta(\theta) = x + i y = r \cdot \cos(\theta) + i r \cdot \sin(\theta)$$

$$\Theta(\theta) = \cos(\theta) + i \cdot \sin(\theta)$$

$$d\Theta(\theta)/d\theta = -\sin(\theta) + i \cos(\theta) = i \Theta(\theta)$$

これより

$$\Theta(\theta) = e^{i\theta}$$

Euler の公式

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$$

$$e^{i\pi} = -1$$

$$e^{i\pi/2} = i$$

2 複素関数

$$w = f(z) = u(x, y) + i v(x, y)$$

複素微分

$$dz = dx + i dy$$

$$dw/dz = [\Delta z \rightarrow 0] \lim \{w(z + \Delta z) - w(z)\} / \Delta z$$

$$\Delta z = \Delta x + i \Delta y$$

先に $\Delta y = 0$, それから $\Delta x \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} dw/dz &= [\Delta x \rightarrow 0] \lim \{w(x+\Delta x, y) - w(x, y)\} / \Delta x \\ &= \partial u / \partial x + i \partial v / \partial x \end{aligned}$$

先に $\Delta x = 0$, それから $\Delta y \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} dw/dz &= [\Delta y \rightarrow 0] \lim \{w(x, y+\Delta y) - w(x, y)\} / i \Delta y \\ &= -i \partial u / \partial y + \partial v / \partial y \end{aligned}$$

複素微分が一義的にきまるためには両者が等しくなくてはならない。これより微分可能な関数については次の関係が成り立たなくてはならない。

Cauchy-Riemannの関係式

$$\partial u / \partial x = \partial v / \partial y, \quad \partial u / \partial y = -\partial v / \partial x$$

逆に Cauchy-Riemann の関係式が成り立つときには

$$\begin{aligned} dw &= \partial u / \partial x \cdot dx + i \partial v / \partial x \cdot dx \\ &\quad + \partial u / \partial y \cdot dy + i \partial v / \partial y \cdot dy \\ &= (\partial u / \partial x + i \partial v / \partial x) \cdot (dx + i dy) \\ &= (\partial u / \partial x + i \partial v / \partial x) \cdot dz \end{aligned}$$

となる。

複素微分可能という事は二変数実数変数の関数が**全微分可能**であるという事である。

正則

複素関数がある領域で微分可能であればその関数はそこで正則(regular)であると称する。

3 Cauchy の積分定理

関数 $w = f(z)$ が正則な領域の任意の閉曲線を C とする。

閉曲線 C の上での複素積分はゼロとなる。

$$[C] \int f(z) dz = 0$$

これは複素関数論の根幹を成す重要な定理である。証明は省略。

正則関数の積分表示

上の C 内の任意の点 z に対して

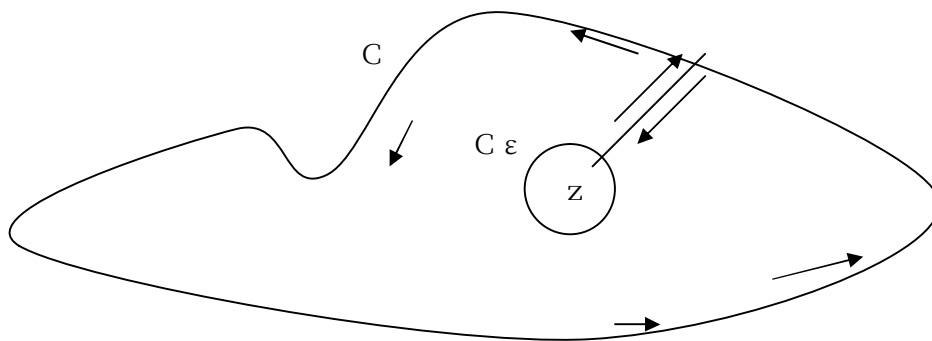
$$f(z) = [C] \int f(\zeta) / (\zeta - z) d\zeta$$

導出

下図において

$$C \varepsilon; |\zeta - z| = \varepsilon$$

閉曲線 C と $C \varepsilon$ の間に挟まれた領域において $f(\zeta) / (\zeta - z)$ は正則であるのでコーシーの積分定理により



$$[C] \int f(\zeta) / (\zeta - z) d\zeta + [C_\epsilon] \int f(\zeta) / (\zeta - z) d\zeta = 0$$

C_ϵ 上において

$$\zeta - z = \epsilon \cdot e^{i\theta}$$

$$d\zeta = i\epsilon \cdot e^{i\theta} d\theta$$

$$\begin{aligned} & [C_\epsilon] \int f(\zeta) / (\zeta - z) d\zeta \\ &= - \int_{\theta=0}^{2\pi} f(z + \epsilon \cdot e^{i\theta}) / \{\epsilon \cdot e^{i\theta}\} \cdot i\epsilon \cdot e^{i\theta} d\theta \\ &= -2\pi i f(z) \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

上のマイナス符号は C_ϵ 上の積分路が時計回りであるため。

故に

$$f(z) = (1/2\pi i) [C] \int f(\zeta) / (\zeta - z) d\zeta$$

となる。

$f(z)$ の微分は

$$f'(z) = (1/2\pi i) [C] \int f(\zeta) / (\zeta - z)^2 d\zeta$$

$$f''(z) = 2(1/2\pi i) [C] \int f(\zeta) / (\zeta - z)^3 d\zeta$$

n 階微分は

$$f^{[n]}(z) = n! (1/2\pi i) [C] \int f(\zeta) / (\zeta - z)^{n+1} d\zeta$$

Taylor展開

$f(z)$ が $|z - a| < R$ で正則であれば

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} C_n \cdot (z - a)^n$$

で表される。ただし

$$C_n = f^{[n]}(a) / n! = 1/n! \cdot [z \rightarrow a] [(d/dz)^n] f(z)$$

$f^{[n]}(a)$ は $z = a$ における $f(z)$ の n 階微分である。

導出

$0 < r < R$ なる r について $|z - a| < r$ なる z に対して

$$\begin{aligned} f(z) &= \int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta) / (\zeta - z) d\zeta \\ &= \int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta) / (\zeta - a - (z - a)) d\zeta \\ &= \int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta) / (\zeta - a) \cdot 1 / (1 - (z - a) / (\zeta - a)) d\zeta \end{aligned}$$

仮定により $|(z - a) / (\zeta - a)| < 1$ であるから

$$1 / (1 - (z - a) / (\zeta - a)) = \sum_{n=0, \infty} \{(z - a) / (\zeta - a)\}^n$$

故に

$$f(z) = \sum_{n=0, \infty} C_n \cdot (z - a)^n$$

ただし

$$\begin{aligned} C_n &= \int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta) / (\zeta - a)^{n+1} d\zeta \\ &= f^{(n)}(a) / n! \end{aligned}$$

零点

上の Taylor 展開で

$$C_0 = C_1 = \dots = C_{h-1} = 0$$

の時 $z = a$ は h 位のゼロ点であるという。

このとき

$$f(z) = (z - a)^h \cdot g(z)$$

と置くと $g(a) \neq 0$

4 有理型関数 Rational Functions

$$f(z) = P(z)/Q(z)$$

$P(z), Q(z)$ は多項式 (Polynomial)

この形の関数を有理型関数 Rational Functions と呼ぶ。

$P(z)$ を n 次、 $Q(z)$ を m 次の多項式とすると $f(z)$ は n 個の零点 ($P(z) = 0$ の根) と m 個の極 (Poles) で決まることになる。

有理型関数の Laurent 展開

$f(z)$ が

$R_1 < |z - a| < R_2$ で正則であるとき

$$f(z) = \sum_{m=-1, -\infty} C_m \cdot (z - a)^m + \sum_{n=0, \infty} C_n \cdot (z - a)^n$$

で表される。ただし

$$C_n = \int_{|\zeta-a|=r} f(\zeta) / (\zeta - a)^{n+1} d\zeta \quad (R_1 < r < R_2)$$

導出は上のテーラー展開と同様の方法でできる。

極(pole)

上のローラン展開において

$$C[-(m+1)] = C[-(m+2)] = \dots = C[-\infty] = 0$$

のとき $z = a$ は m 位の極であると呼ぶ。

この時

$$f(z) = g(z) / (z - a)^m$$

と描くと $g(a) \neq \infty$

5 留数定理 Residue theorem留数 (residue)

$f(z)$ が $R_1 < |z - a| < R_2$ で正則であるとき

$$[|z - a| = r] \int f(z) dz = (1/2\pi i) \cdot C[-1]$$

但し $C[-1]$ はローラン展開の第一項である。

これは

$$[|z - a| = r] \int (z - a)^n dz = 2\pi i (n = -1) \\ = 0 (n \neq -1)$$

より明らかである。

留数の計算方法

$z = P$ が 1 位の極の場合

$$f(z) = C[-1] / (z - P) + C[0] + C[1](z - P) + C[2](z - P)^2 + \dots,$$

となるので

$$\text{Res}(P) = C[-1] = [z \rightarrow P](z - P)f(z)$$

$z = P$ が n 位の極である場合

$$f(z) = C[-n](z - P)^{-n} + C[-n+1](z - P)^{-n+1} + \dots + C[-1](z - P)^{-1} \\ + C[0] + C[1](z - P) + C[2](z - P)^2 + \dots,$$

$$\text{Res}(P) = C[-1] = [z \rightarrow P] 1/(n-1)! \cdot [(d/dz)^{(n-1)}] \{(z - P)^n \cdot f(z)\}$$

留数定理 Residue theorem

$f(z)$ が $R_1 < |z - a| < R_2$ で正則であるとき

$f(z)$ が $|z - a| < R_1$ 内の $z = P_1, P_2, \dots, P_n$ において極を持つとき

$$[|z - a| = r] \int f(z) dz = 2\pi i [k=1, n] \sum \text{Res}(P_k)$$

但し $\text{Res}(P_k)$ は極 P_k における留数である。

これは $f(z)$ が $|z - a| < R_1$ において $z = P_1, P_2, \dots, P_n$ の各点を囲む小円を除いた領域において正則であることを利用して前述の正則関数の積分表示を適用して証明できる。

詳細は複素関数論の教科書を参照の事。

留数定理の応用

広汎な範囲の問題に応用可能。

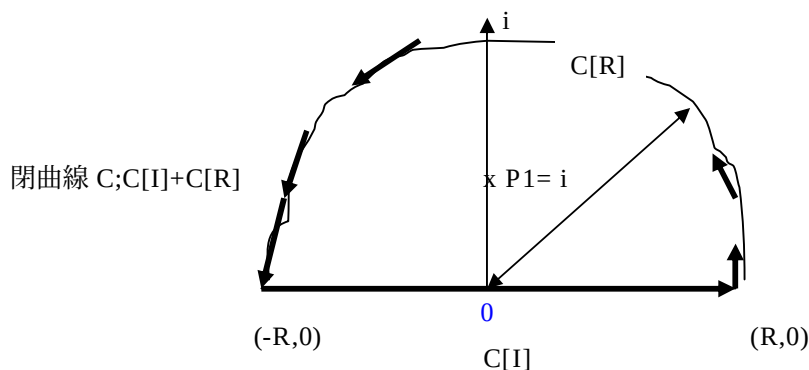
数例を演習問題として挙げる。

問1 次の定積分を計算せよ。

$$(1) \quad I = [-\infty, \infty] \int \{1 / (1 + x^2)\} dx$$

解

$x \rightarrow z$ と変数を置き換えて複素平面に領域を拡張する。



上の図において $C[I]$ は実軸上の $[-R, R]$ なる区間であり $C[R]$ は原点を中心とする半径 R の半円である。 $C[I]$ と $C[R]$ は図示の方向の閉曲線 C を成す。

$f(z) = 1/(1+z^2)$ は $[z \rightarrow \infty] z \cdot f(z) = 0$ なので $[C[R]] \int f(z) dz = 0$ ($R \rightarrow \infty$) となる。
故に

$$I = [R \rightarrow \infty] [C[I]] \int f(z) dz = [R \rightarrow \infty] [C] \int f(z) dz = 2\pi i [k] \sum \text{Res}(P_k)$$

ただし $\text{Res}(P_k)$ は閉曲線 C 内、即ち上半平面にある極の留数である。

今の場合

$f(z) = 1/(1+z^2) = 1/((z+i)(z-i))$ で極は $P1 = i$, $P2 = -i$ の二個あるが閉曲線 C の内部にあるのは $P1$ でありその留数は、

$$\text{Res}(P1) = [z \rightarrow i] (z-i) \cdot f(z) = 1/2i$$

故に

$$I = 2\pi i \cdot \text{Res}(P1) = \pi$$

$$(2) \quad [-\infty, \infty] \int \{1 / (1 + x^2)^2\} dx = I$$

上と同様に変数領域を実数から複素数に拡張する。

$$f(z) = 1/(1+z^2)^2 = 1/(z+i)^2 \cdot 1/(z-i)^2$$

極は $P1 = i$, $P2 = -i$ にそれぞれ 2 位の極となる。

$$\text{Res}(P1) = [z \rightarrow i] [d/dz] \{(z-i)^{-2} \cdot f(z)\} = [z \rightarrow i] \{(-2(z+i)^{-3})\} = 1/4i$$

故に $I = 2\pi i \cdot \text{Res}(P1) = \pi/2$

$$(3) \quad [-\pi, \pi] \int \{\cos(\phi) / (1 + 2a \cdot \cos(\phi) + a^2)\} d\phi = I$$

但し $a > 1$

$z = e^{i\phi}$, $\cos \phi = (z + 1/z)/2$ と置き、 $dz/d\phi = i e^{i\phi} = iz$ より $d\phi = dz/iz$ に注意して積分を複素関数の積分に変換すると

$$I = \int_{|z|=1} f(z) dz$$

$$f(z) = 1/2ai \cdot (z^2+1) / z / (z+a) / (z+1/a)$$

となる。

留数の定理により

$$I = \int_{|z|=1} f(z) dz = 2\pi i \cdot [k] \sum \text{Res}(P_k)$$

ここで $\text{Res}(P_k)$ は単位円の内部にある極 P_k の留数(Residue)である。

$f(z)$ の極は $P_1=0$, $P_2 = -1/a$, $P_3 = -a$ にそれぞれ一位の極がある。

このうち単位円の中にある極は P_1 と P_2 であり留数は

$$\text{Res}(P_1) = [z \rightarrow 0] \{z \cdot f(z)\} = 1/2ai$$

$$\text{Res}(P_2) = [z \rightarrow -1/a] \{(z+1/a) \cdot f(z)\} = -1/2ai \cdot (a^2+1)/(a^2-1)$$

故に

$$I = 2\pi i \cdot \{\text{Res}(P_1) + \text{Res}(P_2)\} = -2\pi/a / (a^2-1)$$

$$(4) \quad [0, \infty] \int \{\cos(x) / (x^2 + a^2)\} dx = I$$

但し $a > 0$

解

$$I = 1/2 \cdot [-\infty, \infty] \int \cos(x)/(x^2 + a^2) dx$$

今

$$J = [-\infty, \infty] \int \sin(x)/(x^2 + a^2) dx = 0$$

なることに注意して $e^{ix} = \cos(x) + i\sin(x)$ を用いると

$$I = 1/2 \cdot [-\infty, \infty] \int e^{ix}/(x^2 + a^2) dx$$

となる。そこで $x \rightarrow z$ により変数領域を複素平面に拡張すると

$$I = 1/2 [C] \int e^{iz}/(z^2 + a^2) dz$$

となる。ただし積分路 C は問題(1)で用いたものと同じである。

$$f(z) = e^{iz}/(z^2 + a^2) = e^{iz}/(z+ai)/(z-ai)$$

上半平面において $[z \rightarrow \infty] f(z) = 0$ であり極は $z=ai$ に一位の極がある。

$$\text{Res}(ai) = e^{(-a)}/2ai$$

より

$$I = 1/2 [C] \int e^{iz}/(z^2 + a^2) dz = 1/2 \cdot 2\pi i \cdot \text{Res}(ai) = \pi e^{(-a)}/2a$$

問2 次の Laplace 変換の逆変換を求めよ。

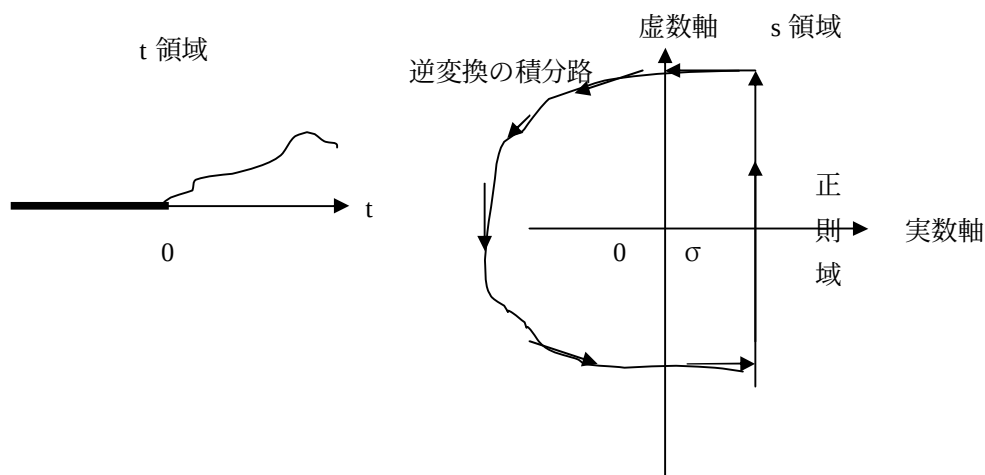
公式

ラプラス変換

$$Y(s) = \int_{t=0}^{\infty} y(t) \cdot e^{-st} dt \quad (\operatorname{Re}(s) > \sigma)$$

逆変換

$$y(t) = (1/2\pi i) \int_{s=\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} Y(s) \cdot e^{st} ds$$



通常ラプラス変換は

$$y(t) = 0 \quad (t < 0)$$

なる条件をつけて $t = 0$ における初期条件のもとに $t > 0$ における $y(t)$ の動作を解析する。

上の条件のもとではラプラス変換 $Y(s)$ は $y(t)$ で決まるある定数 σ に対して $\operatorname{Re}(s) > \sigma$ なる範囲(右半平面)において正則となる。この σ を収束半径と呼ぶ。

上の条件の下では $[s \rightarrow \infty] Y(s) = 0$ となる。

この条件が成り立つ場合の $t > 0$ に対する逆変換は左半平面に存在する極の留数計算により求められる。その理由は $z = R \cdot e^{i\theta}$ ($\pi/2 < \theta < 3\pi/2$) なる左半円上の $Y(s) \cdot e^{st}$ の積分は $t > 0$ なる条件の下で $R \rightarrow \infty$ にすると 0 となるからである。

故に

$$y(t) = (1/2\pi i) \int_{s=-i\infty}^{i\infty} Y(s) \cdot e^{st} ds = [k] \sum \operatorname{Res}(P_k)$$

ただし P_k ($k=1,2,\dots$) は $Y(s) \cdot e^{st}$ の左半複素平面にある極である。

$$(1) Y(s) = (s+1) / \{(s+2)(s+3)\}$$

$Y(s) \cdot e^{st} = (s+1)/(s+2)/(s+3) \cdot e^{st}$ の極と留数は

$$P1 = -2, \quad \text{Res}(P1) = -e^{(-2t)}$$

$$P2 = -3 \quad \text{Res}(P2) = 2e^{(-3t)}$$

故に

$$y(t) = 2e^{(-3t)} - e^{(-2t)} \quad (t > 0)$$

$$(2) Y(s) = 1 / (s^2 + 5)$$

$$Y(s) = 1/(s + \sqrt{5}i) / (s - \sqrt{5}i) \cdot e^{st}$$

$$\text{極は } P1 = \sqrt{5}i \quad \text{Res}(P1) = 1/2 \sqrt{5}i \cdot e^{(\sqrt{5}i)t}$$

$$P2 = -\sqrt{5}i, \quad \text{Res}(P2) = -1/2 \sqrt{5}i \cdot e^{(-\sqrt{5}i)t}$$

故に

$$y(t) = \text{Res}(P1) + \text{Res}(P2) = \sin(\sqrt{5} \cdot t) / \sqrt{5}$$

$$(3) Y(s) = s / (s^2 + \omega^2)^2$$

$$Y(s) = s / (s+i\omega)^2 / (s-i\omega)^2 \cdot e^{st}$$

極は $P1 = i\omega, P2 = -i\omega$ にそれぞれ二位の極がある。

留数は

$$\text{Res}(P1) = [s \rightarrow i\omega] [d/ds] \{s / (s+i\omega)^2 \cdot e^{st}\} = -i\omega t \cdot e^{(i\omega t)} / 4\omega^2$$

$$\text{Res}(P2) = [s \rightarrow -i\omega] [d/ds] \{s / (s-i\omega)^2 \cdot e^{st}\} = i\omega t \cdot e^{(-i\omega t)} / 4\omega^2$$

故に

$$y(t) = \text{Res}(P1) + \text{Res}(P2) = \omega t \cdot \sin(\omega t) / 2\omega$$

$$(4) Y(s) = e^{-(5s)} / (s+2)$$

$$Y(s) = e^{(t-5)s} / (s+2)$$

極は $P1 = -2$ に一位。留数は

$$\text{Res}(P1) = [s \rightarrow -2] e^{(t-5)s} = e^{-2(t-5)}$$

故に

$$y(t) = e^{-2(t-5)}$$

問3 次のZ変換の逆変換を求めよ。

公式

Z変換

$$Y(z) = \sum_{n=0, \infty} y(n) \cdot z^{(-n)} \quad (\text{収束域 } |z| \leq \rho)$$

逆変換

$$y(n) = (1/2\pi i) \int_{|z|=\rho} Y(z).z^{n-1} dz \\ = [k] \sum \text{Res}(P_k)$$

ただし P_k は収束円 ($|z| = \rho$) 内部にある極の留数である。

この逆変換公式は

$$\int_{|z|=\rho} z^k dz = 2\pi i \quad (k=-1) \\ = 0 \quad (\text{それ以外})$$

より直感的に明らかである。収束円が単位円よりも大きい場合には単位円の外にある極の項は時間的に発散する項となるので通常の問題では現れない。

$$(1) \quad Y(z) = 1 / (1 - z^{-1})$$

$$Y(z).z^{n-1} = z^{n-1} / (1 - z^{-1}) = z^n / (z-1)$$

$$\text{極は } P_1=1, \text{Res}(P_1)=1$$

故に

$$y(n) = \text{Res}(P_1) = 1 \quad (n>0) \\ = 0 \quad (n<0)$$

$$(2) \quad Y(z) = 1 / (1 - z^{-1})^2$$

$$Y(z).z^{n-1} = z^{n-1} / (z-1)^2$$

極は $P_1 = 1$ に二位。

$$\text{Res}(P_1) = [z \rightarrow 1] [d/dz] z^{n-1} = n-1$$

故に

$$y(n) = n-1 \quad (n>0) \\ = 0 \quad (n<0)$$

$$(3) \quad Y(z) = (z-1) / \{(z-2)(z+3)\}$$

この場合の収束円は $|z|=3$ である。

$Y(z).z^{n-1}$ の極は $P_1=2, P_2=-3$ に一位。

$$\text{Res}(P_1) = [z \rightarrow 2] z^{n-1} .(z-1)/(z+3) = 2^{n-1}/5 = 2^n/10$$

$$\text{Res}(P_2) = [z \rightarrow -3] z^{n-1} .(z-1)/(z-2) = 4/5 .(-3)^{n-1} = -4/15 .(-3)^n$$

故に

$$y(n) = 2^n/10 - 4/15 .(-3)^n \quad (n>0) \\ = 0 \quad (n<0)$$