

ベクトル・スカラー環代数論

市吉 修

二十一世紀を楽しく生きよう会
‡ 神奈川県相模原市緑区上九沢 230-7

E-mail: osamu-ichiyoshi@muf.biglobe.ne.jp

あらまし

宇宙ロケットや衛星等の飛行体の制御には飛行体に固定した機体座標系と宇宙に固定した慣性座標系との持続的な変換が必要不可欠である。座標変換は機体に固定した機体ベクトルを測定系より与えられる回転軸ベクトルの回りに与えられた角度だけ回転させる事により実行される。その優美な計算方法として四元数を用いる方法がある。四元数は虚数を三次元に拡張したものと見なせるが、虚数を用いずにベクトルだけを用いる方法は無いであろうか。四元数の定義は三次元ベクトルのベクトル積に類似している事からベクトル演算としてベクトル・スカラー積(\mathbf{x})なるものを用いればよらしい。それはベクトル \mathbf{u}, \mathbf{v} に対して $\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ として定義される。但し $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ は通常のベクトル積あるいは外積、 (\mathbf{u}, \mathbf{v}) はスカラー積あるいは内積である。三次元空間の基底ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$, とするとベクトル $\mathbf{u} = u_1\mathbf{i} + u_2\mathbf{j} + u_3\mathbf{k} = (u_1, u_2, u_3)$ と表現できるが、係数 u_1, u_2, u_3 は複素数であり得る。このようにして四元数代数系を拡張したベクトル・スカラー系を定義するとそれは本質的には四元数代数系に等価な環でありながらベクトルと複素数を統合する代数系に拡張できるだけでなく、内積と外積その他のベクトル演算により四元数より遥かに簡潔に計算を行う事ができる。

ベクトル・スカラー積は単位大きさの任意の実ベクトル \mathbf{l} に対して $\mathbf{l}(\mathbf{x})\mathbf{l} = -\mathbf{x}$ となるので虚数に類似の性質を持っている。これにより $\cos(\theta) + \mathbf{l}\sin(\theta) = e^{\mathbf{l}\theta}$ としてベクトル・スカラー環(VSR)の極座標表示が可能となる。本稿においては VSR の逆数を定義して加減乗除の演算法を確立し、それに基づいて、累乗、累乗根、指数関数、対数関数、三角関数等を定義し、一次方程式、及び二次方程式の解法などを示した。

キーワード 宇宙ロケット、座標変換、機体座標、慣性座標、ベクトルの回転、四元数、四元数ベクトル、回転角、回転軸、四元数ベクトル積、外積、内積

A Vector. Scalar Ring Theory

Osamu Ichiyoshi

† Human Network for Better 21 Century

E-mail: † osamu-ichiyoshi@muf.biglobe.ne.jp

Abstract

The quaternion is an expansion of complex number to three dimensions of imaginary numbers. It is a useful tool in calculating rotation of vectors around a given axis in the three dimensional space. The imaginary numbers in quaternion can be replaced with real vectors in the space to give a Vector-Scalar Ring (VSR) which is algebraically equivalent to the whole of quaternions that form a ring. The transition is made by a definition of vector product (\mathbf{x}) as follows. For vectors \mathbf{u} and \mathbf{v} , $\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - (\mathbf{u}, \mathbf{v})$, where $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ and (\mathbf{u}, \mathbf{v}) are respectively normal vector product and scalar product. For any vector \mathbf{l} with a unit length, $\mathbf{l}(\mathbf{x})\mathbf{l} = -\mathbf{x}$, which is similar to the imaginary number. Thus the formula $e^{\mathbf{l}\theta} = \cos(\theta) + \mathbf{l}\sin(\theta)$ can be defined just as Euler's formula in complex number theory. The coefficients in VSR can take complex numbers to achieve a fundamental generalization on vectors and complex numbers. Functions on VSRs can be defined in much the same manners as complex numbers enabling to solve wide range of vectors and scalars problems.

Keywords coordinates, conversion, rotation, vector, quaternion, inertia, fuselage, vector product, scalar product

1. 三次元空間におけるベクトルの回転公式

三次元空間に於いてベクトル \mathbf{r} を回転軸ベクトル \mathbf{a} の周りに角 θ だけ回転させて得られるベクトルを \mathbf{r}' とする。ここで回転軸ベクトル \mathbf{a} の大きさを 1 とする。 $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$ 。

先ず元のベクトル \mathbf{r} は一般的に次式で表現できる。

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}, \mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \quad (1.1)$$

第一項は軸ベクトル \mathbf{a} 成分、第二項は \mathbf{a} と直角な成分である。

求めるベクトル \mathbf{r}' は

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \cos(\theta) + (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot \sin(\theta) + (\mathbf{r}, \mathbf{a})\mathbf{a} \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \{ \mathbf{a} \cdot \cos(\theta) + \sin(\theta) \} + (\mathbf{r}, \mathbf{a})\mathbf{a} \end{aligned} \quad (1.2)$$

以下同様の手法で \mathbf{r}' を軸ベクトル \mathbf{a}' の周りに角 θ' だけ回転させてベクトル \mathbf{r}'' を得る事ができるが \mathbf{r} と \mathbf{r}'' の関係は極めて複雑な式になる。

2. 四元数を用いたベクトル回転の公式

上のベクトル回転は四元数により更に簡潔な表現が可能である。

2.1. 四元数

実数 a, b, c, d に対して以下の四元数が定義される。

$$z = a + ib + jc + kd = (a, b, c, d)$$

ここで虚数 i, j, k は

$$i^2 = j^2 = k^2 = -1, \quad i \cdot j = k = -j \cdot i$$

$$j \cdot k = -k \cdot j = i$$

$$k \cdot i = -i \cdot k = j$$

四元数 (a, b, c, d) のうち a を **実部**、 (b, c, d) を **虚部** と呼ぶ。四元数は複素数の虚部を三次元に拡張したものと見る事ができよう。

四元数 z, u, w に対して以下の性質がある。

$$z \cdot u \neq u \cdot z \quad \text{交換律を満たさず}$$

$$(z \cdot u) \cdot w = z \cdot (u \cdot w) = z \cdot u \cdot w \quad \text{結合律を満たす}$$

$$z \cdot (u + w) = z \cdot u + z \cdot w \quad \text{分配律を満たす}$$

四元数は結合律と分配律は満たすが交換律を満たさない代数系、即ち環を成す。

共役四元数

四元数 $z = a + ib + jc + kd$ に対してその共役四元数 z^* が以下のように定義される。

$$z^* = a - ib - jc - kd$$

四元数の実部と虚部

$$\text{実部; } a = (z + z^*) / 2$$

$$\text{虚部; } (b, c, d) = (z - z^*) / 2$$

四元数の積の共役

四元数 z, w の積の共役について次の関係が成立。

$$(z \cdot w)^* = w^* \cdot z^*$$

四元数の絶対値

上の z と z^* の積は

$$z \cdot z^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = |z|^2$$

この $|z|$ を z の絶対値又は大きさと呼ぶ。

2.2 四元数の応用

三次元空間における任意のベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を四元数 $[r] = (w, x, y, z)$ に対応させる。 $w=0$ は $[r]$ の実部である。即ち三次元空間を四元数の虚部に対応させるのである。また記号 $[r]$ は四元数を明確に表示する為に用いたが誤解を生じない時には記号 $[\]$ は省略しても良い。

今方向余弦ベクトル (l, m, n) を虚部に含む四元数を $[e] = (0, l, m, n)$ とする。

三次元空間におけるベクトル \mathbf{r} を回転軸ベクトル $\mathbf{e} = (l, m, n)$ の周りに角 θ だけ回転させて得られるベクトルを \mathbf{r}' とする

その回転公式は前述の式(1.2)で与えられるがそれを四元数で表現すると

$$[r'] = [T] \cdot [r] \cdot [T]^*$$

但し

$$[T] = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot [e]$$

となる。これは直接計算により(1.2)に等しい事が確認される。

回転 $[T]$ に引き続いて回転 $[U]$ を行うと全体として回転 $[U] \cdot [T]$ を行う。これは非常に合理的な公式であるが、実用上四元数計算は複雑であるので虚数を使わずすべてを実ベクトルで計算できる方法を以下に考察する。

3. ベクトル・スカラー環

3.1. 単位ベクトル演算

三次元 vector 空間の座標単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ に対して各々方向余弦 l, m, n を持つ単位 vector \mathbf{e} を以下により定義する。

$$\mathbf{e} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$
$$(\mathbf{e} \cdot \mathbf{e}) = l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

直角座標の単位ベクトルの性質をまとめると

ベクトルの内積、又はスカラー積;

$$(\mathbf{i} \cdot \mathbf{i}) = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{j}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{k}) = 1$$
$$(\mathbf{i} \cdot \mathbf{j}) = (\mathbf{j} \cdot \mathbf{i}) = 0$$
$$(\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{j}) = 0$$
$$(\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{k}) = 0$$

外積またはベクトル積;

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

3.2. ベクトル・スカラーの定義

実数 a, b に対して **vector.scalar** を次式により定義する。

$$[\mathbf{z}] = a + b \cdot \mathbf{e} = (a, b \cdot l, b \cdot m, b \cdot n)$$

上の a をベクトル・スカラー $[\mathbf{z}]$ の **スカラー部**、 b を **ベクトル部** と呼ぶ事にしよう。
記号 $[\mathbf{z}]$ は四元数とベクトル・スカラーの両方に用いるが混同しないように要注意。

ここで **vector.scalar** の演算として次の乗算 (x) を定義する。
任意の vector \mathbf{u}, \mathbf{v} に対して

$$\mathbf{u} (x) \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - (\mathbf{u}, \mathbf{v})$$

(外積) (内積)

演算 (x) は被演算項の何れかが scalar 値である場合に対しては通常の乗算となるが共に vector なる場合に対しては上のような特殊な演算となるのでこれを **vector.salar 乗算** と呼ぶ事にする。

前述の定義から明らかなように **vector.scalar 乗算** は四元数の乗算と本質的に同じである。故にベクトル・スカラーの全体は四元数と同じく環を成す

代数系である。

Vector 空間における乗算として (x) を元にするればベクトルの内積と外積は次のように定義する事もできる。

$$(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = -\{ \mathbf{u} (x) \mathbf{v} + \mathbf{v} (x) \mathbf{u} \} / 2 \quad (\text{内積})$$
$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \{ \mathbf{u} (x) \mathbf{v} - \mathbf{v} (x) \mathbf{u} \} / 2 \quad (\text{外積})$$

また定義により

$$\mathbf{e} (x) \mathbf{e} = -1$$

となる。ここで単位ベクトル \mathbf{e} を **軸ベクトル** (axis vector) と呼ぶ事にする。

$[\mathbf{z}] = a + b \cdot \mathbf{e}$ は四元数の vector 的表現或いはスカラーとベクトルの統一的表現とも考えられる。この意味で **vector.scalar** と呼び $[\mathbf{z}]$ または単純に z と表記する事にする。

3.3 vector 共役

ベクトル・スカラー $[\mathbf{z}] = a + b \cdot \mathbf{e}$ のベクトル共役 (vector conjugate) を

$$[\mathbf{z}]^{vc} = a - b \cdot \mathbf{e}$$

と定義すると

$$[\mathbf{z}] (x) [\mathbf{z}]^{vc} = (a + b \cdot \mathbf{e}) (x) (a - b \cdot \mathbf{e})$$
$$= a^2 + b^2$$
$$= |[\mathbf{z}]|^2$$

となる。ここで $|[\mathbf{z}]|$ は $[\mathbf{z}]$ の絶対値、または大きさである。

上のベクトル・スカラーについて

$[\mathbf{z}] = a + b \cdot \mathbf{e}$ の a を scalar 部、 b を vector 部と定義すると

$$a = \{ [\mathbf{z}] + [\mathbf{z}]^{vc} \} / 2$$
$$= S[\mathbf{z}] \quad ; \text{スカラー部 (scalar part)}$$

$$b = \{ [\mathbf{z}] - [\mathbf{z}]^{vc} \} / (2 \cdot \mathbf{e})$$
$$= V[\mathbf{z}] \quad ; \text{ベクトル部 (vector part)}$$

ここで $1/\mathbf{e} = -\mathbf{e}$ である。何故なら $(1/\mathbf{e}) (x) \mathbf{e} = 1$ 。

3.4. 異なる軸を有する vector.scalar の演算

異なる軸 vector; \mathbf{e}, \mathbf{f} を有する vector.scalar $[\mathbf{z}], [\mathbf{w}]$

$$[\mathbf{z}] = a + b \cdot \mathbf{e}$$

$$[\mathbf{w}] = c + d \cdot \mathbf{f}$$

とすると

$$[\mathbf{z}] (x) [\mathbf{w}] = (a + b \cdot \mathbf{e}) (x) (c + d \cdot \mathbf{f})$$

$$= a \cdot c - b \cdot d \cdot (\mathbf{e} \cdot \mathbf{f}) + b \cdot c \cdot \mathbf{e} + a \cdot d \cdot \mathbf{f} + b \cdot d \cdot \mathbf{e} \times \mathbf{f}$$

他方

$$[\mathbf{w}] (x) [\mathbf{z}] = (c + d \cdot \mathbf{f}) (x) (a + b \cdot \mathbf{e})$$

$$= a.c - b.d.(e.f) + b.c.e + a.d.f + b.d.f \times e$$

故に

$[z](x)[w] \neq [w](x)[z]$;交換律を満たさず。
但し $e = f$ の場合には交換律を満たす。

共役演算については異なる軸ベクトル e, f についても一般に次式が成り立つ。

$$\{[z](x)[w]\}^{vc} = [w]^{vc}(x)[z]^{vc}$$

更に絶対値に関しては異なる軸 vector の四元 vector についても一般に次の関係が成り立つ。

$$|[z](x)[w]| = |[z]| \cdot |[w]|$$

3.5. ベクトル・スカラーの極座標表示

ベクトル・スカラー $[x]$ を

$$[x] = x_0 + \mathbf{x} \\ = (x_0, x_1, x_2, x_3)$$

のように表現する事とする。

ここで x_0 はスカラー部であり

$$\mathbf{x} = x_1.\mathbf{i} + x_2.\mathbf{j} + x_3.\mathbf{k}$$

はベクトル部である。

また

$$|[x]| = \text{SQR}\{(x_0)^2 + |\mathbf{x}|^2\} \\ |\mathbf{x}| = \text{SQR}\{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2\}$$

すると

$$[x] = x_0 + \mathbf{x} \\ = |[x]| \cdot \{\cos(\theta x) + \sin(\theta x) \cdot \mathbf{l}_x\} \\ = |[x]| \cdot e^{(\theta x) \cdot \mathbf{l}_x}$$

但し

$$\cos(\theta x) = x_0 / |[x]| \\ \sin(\theta x) = |\mathbf{x}| / |[x]| \\ \mathbf{l}_x = \mathbf{x} / |\mathbf{x}|$$

これが成立する事は以下の事から分かる。

$$[T] = \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{l}$$

と置き

これを θ で微分すると

$$[d/d\theta][T] = -\sin(\theta) + \cos(\theta) \cdot \mathbf{l} \\ = \mathbf{l}(x)[T]$$

これから形式的に

$$[T] = e^{(\mathbf{l}\theta)} = \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{l}$$

3.6 Vector.Scalar を用いた回転の表現

三次元空間において任意の vector \mathbf{r} を方向余弦ベクトル $\mathbf{e} = \mathbf{l}_i + \mathbf{m}_j + \mathbf{n}_k = (l, m, n)$ を軸(axis)としてその周りに角 θ だけ回転させて vector \mathbf{r}' を得たとすると

$$\mathbf{r}' = \{ \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot \mathbf{e} \} \\ (x) \mathbf{r} \\ = e^{(\theta/2) \cdot \mathbf{e}} (x) \mathbf{r} (x) e^{(-\theta/2) \cdot \mathbf{e}}$$

となる。これは直接計算により

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) + \{ \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{e} \} \times \{ \mathbf{r} - \mathbf{e}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \} \\ = (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \times \{ \mathbf{e} \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{e}) \} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e}$$

となる事により確認できる。

3.7. 複素係数の Vector.Scalar

ベクトル・スカラー環(Vector-Scalar Ring)

VSR $[z]$ は

$$[z] = z_0 + \mathbf{z} \\ = z_0 + z_1.\mathbf{i} + z_2.\mathbf{j} + z_3.\mathbf{k}$$

ここで係数 $\{z_n; n = 0, 1, 2, 3\}$ は一般には複素数値を取る事ができる。

$$z_n = x_n + y_n.\mathbf{i} \quad (\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = -1)$$

x_n は実部、 y_n は虚部であり実数値を取る。

ベクトル共役と複素共役

$$\text{VSR } [z] = z_0 + \mathbf{z} \text{ の}$$

ベクトル共役(Vector Conjugate)は;

$$[z]^{vc} = z_0 - \mathbf{z}$$

複素共役(Complex Conjugate)は

$$[z]^{cc} = z_0^{cc} + \mathbf{z}^{cc} \\ = x_0 + x_1.\mathbf{i} + x_2.\mathbf{j} + x_3.\mathbf{k} \\ - \mathbf{i} \cdot \{y_0 + y_1.\mathbf{i} + y_2.\mathbf{j} + y_3.\mathbf{k}\}$$

実数スカラー部と虚数ベクトル部

VSR $[z]$ とそのベクトル且つ複素共役の積は

$$[z](x)[z]^{vc,cc} = |z_0|^2 + |\mathbf{z}|^2 \\ - z_0 \cdot \mathbf{z}^{cc} + z_0^{cc} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \times \mathbf{z}^{cc}$$

スカラー部は非負の実数でありベクトル部は純虚数値をとる。

$$\text{Re}\{[z](x)[z]^{vc,cc}\} = \text{Sc}\{[z](x)[z]^{vc,cc}\} \\ = |z_0|^2 + |\mathbf{z}|^2$$

$$\text{Im}\{[z](x)[z]^{vc,cc}\} = \text{Vc}\{[z](x)[z]^{vc,cc}\} \\ = -z_0 \cdot \mathbf{z}^{cc} + z_0^{cc} \cdot \mathbf{z} - \mathbf{z} \times \mathbf{z}^{cc}$$

複素 VSR の Norm

上のスカラー部の平方根を $[z]$ の Norm と呼ぶ。

$$\|[z]\| = \text{SQR}(|z_0|^2 + |\mathbf{z}|^2)$$

極座標表示

$$\begin{aligned}
[z] &= z_0 + \mathbf{z} \\
&= \| [z] \| \cdot \left(\frac{|z_0|}{\| [z] \|} \cdot \frac{z_0}{|z_0|} \right. \\
&\quad \left. + \frac{|\mathbf{z}|}{\| [z] \|} \cdot \frac{\mathbf{z}}{|\mathbf{z}|} \right) \\
&= \| [z] \| \cdot \{ \cos(\theta z) \cdot \frac{z_0}{|z_0|} + \sin(\theta z) \cdot \mathbf{1z} \}
\end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
\cos(\theta z) &= |z_0| / \| [z] \| \\
\sin(\theta z) &= |\mathbf{z}| / \| [z] \| \\
\mathbf{1z} &= \mathbf{z} / |\mathbf{z}|
\end{aligned}$$

更に実部と虚部に分けると

$$\begin{aligned}
& [z] / \| [z] \| \\
&= \cos(\theta z) \cdot \frac{z_0}{|z_0|} + \sin(\theta z) \cdot \mathbf{1z} \\
&= \cos(\theta z) \cdot \frac{x_0}{|z_0|} + \sin(\theta z) \cdot \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \\
&\quad + i \cdot \{ \cos(\theta z) \cdot \frac{y_0}{|z_0|} + \sin(\theta z) \cdot \frac{\mathbf{y}}{|\mathbf{y}|} \} \\
&= \cos(\theta z) \cdot \cos(\phi) + \sin(\theta z) \cdot \cos(\Psi) \mathbf{1x} \\
&+ i \cdot \{ \cos(\theta z) \cdot \sin(\phi) + \sin(\theta z) \cdot \sin(\Psi) \mathbf{1y} \}
\end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned}
\cos(\phi) &= x_0 / |z_0| \\
\sin(\phi) &= y_0 / |z_0| \\
\cos(\Psi) &= |\mathbf{x}| / |\mathbf{z}| \\
\sin(\Psi) &= |\mathbf{y}| / |\mathbf{z}| \\
\mathbf{1x} &= \mathbf{x} / |\mathbf{x}| \\
\mathbf{1y} &= \mathbf{y} / |\mathbf{y}|
\end{aligned}$$

4. VSR の演算

4.1 環

VSR の加算、乗算は四元数に等価である。

$$\begin{aligned}
[x] (x) [y] &= [y] (x) [x]; \text{交換律を満たさず} \\
([x] (x) [y]) (x) [z] &= [x] (x) ([y] (x) [z]); \\
&\text{結合律を満たす}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[x] (x) ([y] + [z]) &= [x] (x) [y] + [x] (x) [z] \\
([x] + [y]) (x) [z] &= [x] (x) [z] + [y] (x) [z]; \\
&\text{分配律を満たす。}
\end{aligned}$$

従って VSR の全体は環を成す。

4.2. 逆元

VSR $[z] = z_0 + \mathbf{z}$ に対して

$$\begin{aligned}
[z] (x) [z]^{\text{vc}} &= (z_0 + \mathbf{z}) (x) (z_0 - \mathbf{z}) \\
&= z_0^2 + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}) \\
&= |[z]|^2
\end{aligned}$$

故に $[z]$ の逆元は

$$1/[z] = [z]^{\text{vc}} / |[z]|^2$$

但し絶対値

$$|[z]| = \text{SQR}(z_0^2 + (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z}))$$

は一般には複素数値を取る。

逆元については交換律が成立する。

$$1/[z] (x) [z] = [z] (x) 1/[z] = 1$$

特に $z_0 = 0$ の場合にはベクトルの逆元が

$$1/\mathbf{z} = -\mathbf{z} / (\mathbf{z} \cdot \mathbf{z})$$

となる。

4.3 積

VSR $[x], [y]$ の積が $[z]$ になるものとする。

$$\begin{aligned}
[x] (x) [y] &= (x_0 + \mathbf{x}) (x) (y_0 + \mathbf{y}) \\
&= x_0 \cdot y_0 - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}) + x_0 \cdot \mathbf{y} + y_0 \cdot \mathbf{x} + \mathbf{x} \times \mathbf{y}
\end{aligned}$$

極座標表示では

$$\begin{aligned}
[x] &= \| [x] \| \cdot e^{(\theta x) \cdot \mathbf{1x}} \\
&= \| [x] \| \cdot (\cos(\theta x) + \sin(\theta x) \cdot \mathbf{1x})
\end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned}
[y] &= \| [y] \| \cdot (\cos(\theta y) + \sin(\theta y) \cdot \mathbf{1y}) \\
[z] &= \| [z] \| \cdot (\cos(\theta z) + \sin(\theta z) \cdot \mathbf{1z})
\end{aligned}$$

すると

$$\begin{aligned}
[z] &= [x] (x) [y] \text{の時} \\
\| [z] \| &= \| [x] \| \cdot \| [y] \| \\
\cos(\theta z) &= \cos(\theta x) \cdot \cos(\theta y) \\
&\quad - \sin(\theta x) \cdot \sin(\theta y) \cdot (\mathbf{1x} \cdot \mathbf{1y}) \\
\sin(\theta z) \cdot \mathbf{1z} &= \cos(\theta x) \cdot \sin(\theta y) \cdot \mathbf{1y} \\
&\quad + \cos(\theta y) \cdot \sin(\theta x) \cdot \mathbf{1x} \\
&\quad + \sin(\theta x) \cdot \sin(\theta y) \cdot (\mathbf{1x} \times \mathbf{1y})
\end{aligned}$$

以上で VSR の加減乗除の方法が確立した。

5. VSR の関数

5.1 累乗と累乗根

累乗

上の積の演算において $[x] = [y]$ とおくと

$$\begin{aligned}
[x]^2 &= \| [x] \|^2 \\
&\quad \cdot (\cos(2\theta x) + \sin(2\theta x) \cdot \mathbf{1x}) \\
&= \| [x] \|^2 \cdot e^{(2\theta x) \cdot \mathbf{1x}}
\end{aligned}$$

一般に自然数 n に対して

$$[x]^n = \| [x] \|^n \cdot e^{(n \cdot \theta x) \cdot \mathbf{1x}}$$

累乗根

VSR $[b]$

$$[b] = b_0 + \mathbf{b} = \| [b] \| \cdot e^{(\theta b) \cdot \mathbf{1b}}$$

に対して

$$[x]^2 = [b]$$

なる $[x]$ を $[b]$ の平方根と呼ぶ。

$$\| [x] \|^2 \cdot e^{(2\theta x) \cdot \mathbf{1x}} = \| [b] \| \cdot e^{(\theta b) \cdot \mathbf{1b}}$$

$$= \| [b] \| \cdot e^{(\theta b + 2\pi) \cdot 1b}$$

より

$$\| [x] \| = \text{SQR}(\| [b] \|)$$

$$\theta_x = \theta_b/2, \quad \theta_b/2 + \pi$$

$$1_x = 1_b$$

故に平方根は 2 個ある。

$$[x] = +, - \text{SQR}(\| [b] \|) \cdot e^{(\theta_b/2) \cdot 1b}$$

一般に n 乗根は n 個存在する。

5.2. 指数関数

実数 p に対して

$$P^x = p^{(x_0 + \mathbf{x})}$$

$$= p^{x_0} \cdot e^{(\log(p) \cdot \mathbf{x}) \cdot 1_x}$$

$$= p^{x_0} \cdot (\cos(\log(p) \cdot \mathbf{x}) + \sin(\log(p) \cdot \mathbf{x}) \cdot 1_x)$$

但し

$$x = |\mathbf{x}|$$

$$1_x = \mathbf{x} / x$$

実数 p, q に対して

$$(p \cdot q)^x = p^x(x) \cdot q^x(x)$$

他方

$$[x]^p = (\| [x] \| \cdot e^{(\theta_x \cdot 1_x)})^p$$

$$= \| [x] \| ^p \cdot e^{(p \cdot \theta_x \cdot 1_x)}$$

として定義すると

異なる [x], [y] に対して

$$([x] \cdot (x) \cdot [y])^p \neq [x]^p(x) \cdot [y]^p$$

$$p^{([x]+[y])} \neq p^x(x) \cdot p^y$$

即ち異なる軸ベクトルを有する VSR に対しては指数法則は成立しない。但し同一の軸ベクトルを有する VSR の間には積の交換律が成立するため指数法則が成立し、指数関数を定義できる。

5.3 対数関数

$$[x] = \| [x] \| \cdot e^{(\theta_x \cdot 1_x)}$$

$$= \| [x] \| \cdot e^{((\theta_x + 2\pi n) \cdot 1_x)} \quad (n \text{ は整数})$$

に対して

$$\text{Log}([x]) = \log(\| [x] \|) + (\theta_x + 2\pi n) \cdot 1_x$$

5.4 三角関数

指数関数を用いて以下の様に定義する。

$$\cosh([x]) = \{e^x + e^{-x}\} / 2$$

$$\sinh([x]) = \{e^x - e^{-x}\} / 2$$

$$\cos(x) = (e^{(x \cdot 1_x)} + e^{(-x \cdot 1_x)}) / 2$$

$$\sin(x) = (e^{(x \cdot 1_x)} - e^{(-x \cdot 1_x)}) / (2i_x)$$

但し

$$1_x = \mathbf{x} / x$$

$$1_x(x) \cdot 1_x = -1$$

複素 VSR の三角関数

VSR の三角関数は複素数の三角関数と同じ形の公式が成り立つ。

$$\cosh([z]) = \cosh(z_0 + \mathbf{z})$$

$$= \cosh(z_0) \cdot \cos(\mathbf{z}) + i_z \cdot \sinh(z_0) \cdot \sin(\mathbf{z})$$

$$\sinh([z]) = \sinh(z_0 + \mathbf{z})$$

$$= \sinh(z_0) \cdot \cos(\mathbf{z}) + i_z \cdot \cosh(z_0) \cdot \sin(\mathbf{z})$$

更に一般に [z] が複素係数を有する場合は、

$$z_0 = x_0 + y_0 \cdot i$$

$$\mathbf{z} = \mathbf{x} + \mathbf{y} \cdot i$$

より

$$1_z = \mathbf{z} / z = x/z \cdot \mathbf{x} / x + y/z \cdot \mathbf{y} / y \cdot i$$

$$= \cos(\phi) \cdot 1_x + i \cdot \sin(\phi) \cdot 1_y$$

のように直角方向の 2 ベクトルに分解できる。

但し

$$z = |\mathbf{z}| = \text{SQR}(x^2 + y^2)$$

$$x = |\mathbf{x}| = \text{SQR}(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)$$

$$y = |\mathbf{y}| = \text{SQR}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

また

$$\sinh(z_0) = \sinh(x_0) \cdot \cos(y_0) + i \cdot \sin(y_0) \cdot \cosh(x_0)$$

$$\cosh(z_0) = \cosh(x_0) \cdot \cos(y_0) + i \cdot \sin(y_0) \cdot \sinh(x_0)$$

である。

6. VSR の方程式

未知の VSR $[x] = (x_0, x_1, x_2, x_3)$ を含む方程式はその要素に還元して連立方程式を立てて解く事が基本的に可能である。それは四元数演算を行うに等しく、通常煩雑である。VSR 演算を用いればベクトル演算によってより簡潔に又数理物理学的概念を駆使して計算ができるだけでなく複素係数の VSR をも扱う事ができる。

6.1. 一次方程式

[1] 基本方程式

$$[a](x) \cdot [x] = [b]$$

の解は

$$[x] = 1/[a](x) \cdot [b]$$

[2] 未知ベクトルの一次方程式

$$\mathbf{a} \times \mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (6.1)$$

これを VSR にするために補助方程式を立て

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{y}) = \lambda \text{ (任意の定数)} \quad (6.2)$$

両者の差を取ると

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{y} = \mathbf{b} - \lambda)$$

これより

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= 1/\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \lambda) \\ &= -\mathbf{a}/a^2 \times (\mathbf{b} - \lambda) \\ &= \mathbf{b} \times \mathbf{a} / a^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})/a^2 + (\lambda / a^2) \cdot \mathbf{a} \end{aligned}$$

\mathbf{y} が純ベクトルであるためには

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = 0$$

でなくてはならない。

故に解は

$$\mathbf{y} = \mathbf{b} \times \mathbf{a} / a^2 + (\lambda / a^2) \cdot \mathbf{a} \quad (6.3)$$

これは式(6.2)の解でもある。その場合は λ が与えられた数であり、 \mathbf{b} が任意のベクトルとなる。

[3] 左右からの積を含む一次 VSR 方程式

$$[\mathbf{a}] \times (\mathbf{x}) [\mathbf{x}] + [\mathbf{x}] \times (\mathbf{x}) [\mathbf{b}] = [\mathbf{c}]$$

具体的には

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times (\mathbf{x} + \mathbf{x}) + (\mathbf{x} + \mathbf{x}) \times (\mathbf{b} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} + \mathbf{c}$$

計算の結果

Scalar 部は

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} - ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{x}$$

Vector 部は

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{x} + \mathbf{x} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{x} = \mathbf{c}$$

ここで第二項はベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の張る平面、第三項はそれと垂直な空間にある。従って \mathbf{x}, \mathbf{c} はそれぞれの空間にある二つの成分から成る。ベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の張る空間を Inside, それと直交する空間を transversal としてそれぞれ添え字 i, t で区別すると

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x} - ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}) &= \mathbf{c} \cdot \mathbf{x} \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_0 \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) &= \mathbf{c}_i \\ (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}_t + (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{x}_i &= \mathbf{c}_t \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} \mathbf{c}_t &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) / |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \times \{ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b}) / |\mathbf{a} + \mathbf{b}| \} \\ &= (\mathbf{a} - \mathbf{b}) / |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \times \{ \mathbf{c} \times (\mathbf{a} - \mathbf{b}) / |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \} \\ \mathbf{c}_i &= \mathbf{c} - \mathbf{c}_t \end{aligned}$$

以上の方程式を以下にまとめると

$$\begin{aligned} \alpha_i &= a_i + b_i \quad (i = 0, 1, 2, 3) \\ \beta_i &= a_i - b_i \quad (i = 0, 1, 2, 3) \end{aligned}$$

として

$$\begin{aligned} \alpha_0 \cdot x_0 - (\alpha \cdot \mathbf{x}_i) &= c_0 \\ \alpha_0 \cdot \mathbf{x}_i + x_0 \cdot \alpha &= \mathbf{c}_i \\ \alpha_0 \cdot \mathbf{x}_t + \beta \times \mathbf{x}_i &= \mathbf{c}_t \end{aligned}$$

以上を解くと

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_i + \mathbf{x}_t$$

◆ $\alpha_0 \neq 0$ の時

$$\begin{aligned} x_0 &= (\alpha_0 \cdot c_0 + \alpha \cdot \mathbf{c}_i) / |\alpha|^2 \\ \mathbf{x}_i &= (\mathbf{c}_i - x_0 \cdot \alpha) / \alpha_0 \\ \mathbf{x}_t &= (\mathbf{c}_t - \beta \times \mathbf{x}_i) / \alpha_0 \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} \alpha &= (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) \\ \beta &= (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \\ |\alpha|^2 &= \alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2 \end{aligned}$$

◆ $\alpha_0 = 0$ の時

$$\begin{aligned} \alpha \cdot \mathbf{x}_i &= -c_0 \\ x_0 \cdot \alpha &= \mathbf{c}_i \\ \beta \times \mathbf{x}_i &= \mathbf{c}_t \end{aligned}$$

ベクトル $\alpha = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ がベクトル \mathbf{c}_i と方向が一致しなくては解無し。

方向が一致するなら

$$\begin{aligned} x_0 &= |\mathbf{c}_i| / |\alpha| \\ \mathbf{x}_i &= (\mathbf{c}_t \times \beta + \lambda \cdot \beta) / (\beta \cdot \beta) \end{aligned}$$

但し

$$\lambda = -\{ (\beta \cdot \beta) \cdot c_0 + \alpha \cdot (\mathbf{c}_t \times \beta) \} / (\alpha \cdot \beta)$$

この時 \mathbf{x}_t は任意のベクトルとなる。

二次方程式

[1] 基本方程式

未知数 $[x]$ に対して

$$[x]^2 + [\mathbf{a}] \times (\mathbf{x}) [\mathbf{x}] + [\mathbf{x}] \times (\mathbf{x}) [\mathbf{a}] + [\mathbf{c}] = 0$$

これを変形して

$$\{ [x] + [\mathbf{a}] \}^2 = [\mathbf{a}]^2 - [\mathbf{c}]$$

故に

$$[x] = -[\mathbf{a}] \pm \text{SQR}([\mathbf{a}]^2 - [\mathbf{c}])$$

[2] 一般の場合

$$[x]^2 + [\mathbf{a}] \times (\mathbf{x}) [\mathbf{x}] + [\mathbf{x}] \times (\mathbf{x}) [\mathbf{b}] + [\mathbf{c}] = 0$$

ここで

$$[x] = x_0 + \mathbf{x}$$

なる記述法により詳細な成分を計算すると

Scalar 部

$$x_0^2 + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot x_0 + c_0 - \{ (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}) + ((\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{x}) \} = 0$$

Vector 部

$$(2x_0+a_0+b_0) \cdot \mathbf{x} + x_0 \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{x} + \mathbf{c} = 0$$

第3項はベクトル \mathbf{a}, \mathbf{b} の張る面に垂直であるから一次方程式の場合と同様にその面の内部と直交する外部空間に分けて

$$(2x_0+a_0+b_0) \cdot \mathbf{x}_i + x_0 \cdot (\mathbf{a}+\mathbf{b}) + (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{x}_t + \mathbf{c}_i = 0$$

$$(2x_0+a_0+b_0) \cdot \mathbf{x}_t + (\mathbf{a}-\mathbf{b}) \times \mathbf{x}_i + \mathbf{c}_t = 0$$

その解は

$2x_0+a_0+b_0 = 0$ の時

$$x_0 = -(a_0+b_0)/2$$

$$\mathbf{x}_i = \{ \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{c}_t + \lambda \boldsymbol{\beta} \} / (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta})$$

$$\mathbf{x}_t = \{ \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{c}_i + x_0 \cdot \boldsymbol{\beta} \times \boldsymbol{\alpha} \} / (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta})$$

但し

$$\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$$

$$\boldsymbol{\beta} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$$

λ は任意の定数

$2x_0 + \alpha_0 \neq 0$ の時

$$\mathbf{x}_i = \{ \lambda \cdot \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{c}_t - (2x_0 + \alpha_0) \cdot (x_0 \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{c}_i) \} / \{ (2x_0 + \alpha_0)^2 + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}) \}$$

$$\mathbf{x}_t = \{ \boldsymbol{\beta} \times (x_0 \cdot \boldsymbol{\alpha} + \mathbf{c}_i) - (2x_0 + \alpha_0) \cdot \mathbf{c}_t \} / \{ (2x_0 + \alpha_0)^2 + (\boldsymbol{\beta} \cdot \boldsymbol{\beta}) \}$$

但し

$$\lambda = - \{ x_0 \cdot (\boldsymbol{\alpha} \cdot \boldsymbol{\beta}) + (\boldsymbol{\beta} \cdot \mathbf{c}_i) \} / (2x_0 + \alpha_0)$$

x_0 は scalar 方程式によって求めるが4次以上の方程式になるためその解を書き下す事は困難である。

逐次算法

一般式としての解は困難でも具体的な数値問題においては回路あるいは Analog Computer 的な方法で逐次算法により数値解が求まるであろう。

一般的な2次方程式を以下の様に変換する。

$$[a](x)[x] = - \{ x[x] + x[b] + [c] \}$$

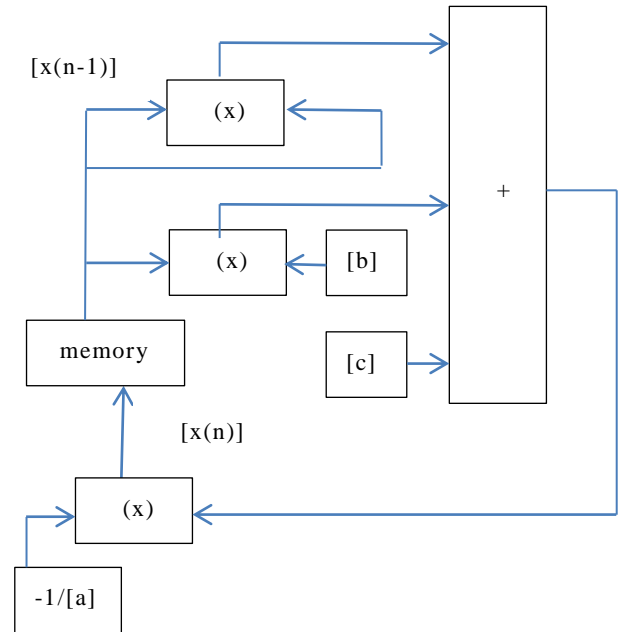
$$[x] = -1/[a](x) \{ x[x] + x[b] + [c] \}$$

これは再帰形式をしているので n 回目の結果を $x(n)$ で表すと

$$[x(n)] = -1/[a](x)$$

$$\{ [x(n-1)](x)[x(n-1)] + [x(n-1)](x)[b] + [c] \}$$

計算回路を下図に示す。



二次方程式の逐次算法回路

上の回路に先ず初期値として例えば

$$[x(0)] = (1, 1, 1, 1,)$$

等を代入して逐次計算を行えば良い。回数 n が大きくなるにつれて

$$n \rightarrow \text{大} \text{ に対して } [x(n)] - [x(n-1)] \rightarrow 0$$

となるならば解が求まる。

一般の次数についても同様の解法が適用できるであろう。

参考文献

- [1] 飯野明 よく分かる航空力学の基本[第二版] 秀和システム 2009
- [2] 宮澤政文 宇宙ロケット工学入門 朝倉書店 2016
- [3] 今野紀雄 四元数 森北出版
- [4] 四次元の幾何学 プレアデス出版