

チャープフィルタとその応用

2006/10/5 市吉 修

1 Chirp filter

送信 Chirp 信号

Chirp とは虫の鳴き声の擬態語であり、Chirp 信号は周波数が時間に比例して変わるものである。

$$\begin{aligned} s(t) &= w(t) \cdot e^{j(\omega_c t - \mu \cdot t^2)} & (0 < t < T_1) \\ &= 0 & (\text{それ以外}) \end{aligned}$$

ここで $w(t)$ は信号の振幅である。

$s(t)$ の位相 $\theta(t)$ は

$$\theta(t) = \omega_c t - \mu \cdot t^2 \quad (0 < t < T)$$

位相の微分は周波数 $f(t)$ であるから

$$f(t) = d\theta(t)/dt / 2\pi = f_c - 2\mu \cdot t / 2\pi \quad (0 < t < T_1)$$

即ち Chirp 信号とは時間に比例して周波数を変化させる信号である。掃引時間 T_1 の間の周波数変化幅 B は

$$B = 2\mu \cdot T_1 / 2\pi \quad (\text{Hz})$$

である。

$\mu = \pi \cdot B / T$ (rad/sec²) をチャープ率という。

Chirp filter

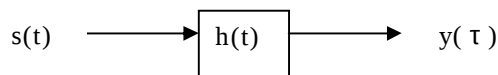
上の Chirp 信号に対してインパルス応答が次の Chirp filter を考える。

$$h(t) = e^{j(\omega_f t + \mu' \cdot t^2)} \quad (0 < t < T_2)$$

即ち上の Chirp 信号とは極性が反対のチャープ率のフィルターである。

Convolver

上の Chirp 信号 $s(t)$ を Chirp filter に入力し、その出力を $y(\tau)$ とする。



出力 y は $s(t)$ と $h(t)$ の畳み込み(convolution)で与えられる。

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \int s(t) \cdot h(\tau - t) dt \\ &= e^{j(\omega_f \tau + \mu' \cdot \tau^2)} \cdot \int w(t) \cdot e^{j\{(\omega_c - \omega_f) \cdot t - 2\mu' \cdot \tau \cdot t + (\mu - \mu') \cdot t^2\}} dt \end{aligned}$$

Chirp 率は完全に整合しているものと仮定する。即ち $\mu = \mu'$

上の積分範囲は $0 < t < T_1$, $\tau - T_2 < t < \tau$ である。

今実用的に興味があるのは $\tau > T1$ のばあいである。この時出力は

$$y(\tau) = e^{j(\omega_f \tau + \mu' \tau^2/2)} \cdot W\{2\mu \tau - (\omega_c - \omega_f)\}$$

但し W は w のフーリエ変換であり

$$w(t) = 1 \quad (0 < t < T1) \\ = 0 \quad (T1 < t)$$

の場合は

$$W(j\omega) = T1 \cdot e^{(-j\omega \cdot T1/2)} \cdot \sin(\omega \cdot T1/2) / (\omega \cdot T1/2)$$

これより出力 y は

$$y(\tau) = e^{j(\omega_f + \mu \cdot T1) \cdot \tau + \mu \cdot \tau^2/2} \\ \cdot e^{j(\Delta \omega \cdot T1/2)} \\ \cdot T1 \cdot \sin\{\mu \cdot T1 \cdot (\tau - \Delta \omega/2\mu)\} / \{\mu \cdot T1 \cdot (\tau - \Delta \omega/2\mu)\}$$

但し $\Delta \omega = \omega_c - \omega_f$

これは時間位置 $\tau = \Delta \omega/2\mu$ に振幅 $T1$ の尖頭値を持ち、時間幅; $2\pi/\mu \cdot T1$ の Sinc 関数波形($\sin(x)/x$ の形の)のパルスである(図示せよ)。

下の $f-t$ 図に示すように掃引時間 $T1$ の信号が幅 $1/B$ のパルスに時間圧縮される。

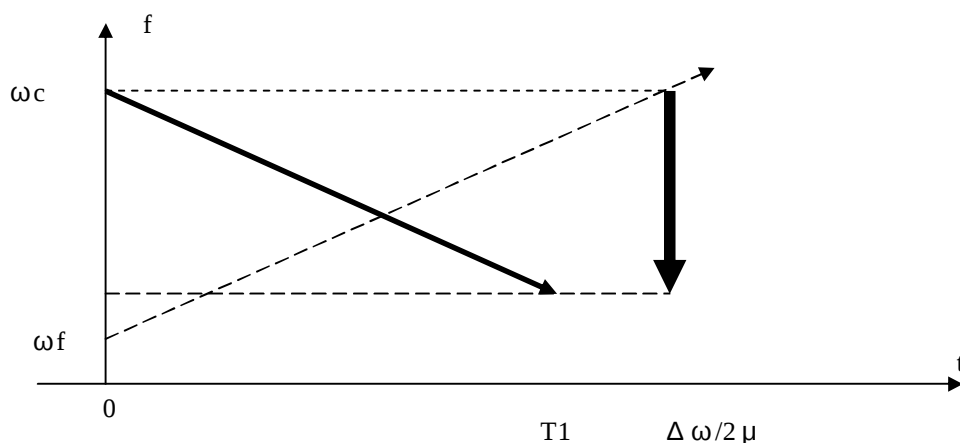


図 1-1 Chirp filter によるパルス圧縮の機構

レーダへの応用

レーダはできる限り短いパルスを出せる限り大振幅で発生させる必要がある。きわめて短時間とは言え出力 MW 級の電力増幅器は大規模な装置となる。上に紹介した Chirp 信号は送信部において時間 $T1$ に帯域幅 B に渡る周波数掃引を行う連続信号を発生し、受信部において Convolver により振幅が $T1$ に、パルス幅が $1/B$ に比例する信号を再生するものである。 B も $T1$ も大きいほどレーダとしての性能が向上する。そこでレーダーの性能を B と $T1$ の積で表し、これを BT 積と称する。

2. FDM/TDM 変換への応用

回路構成

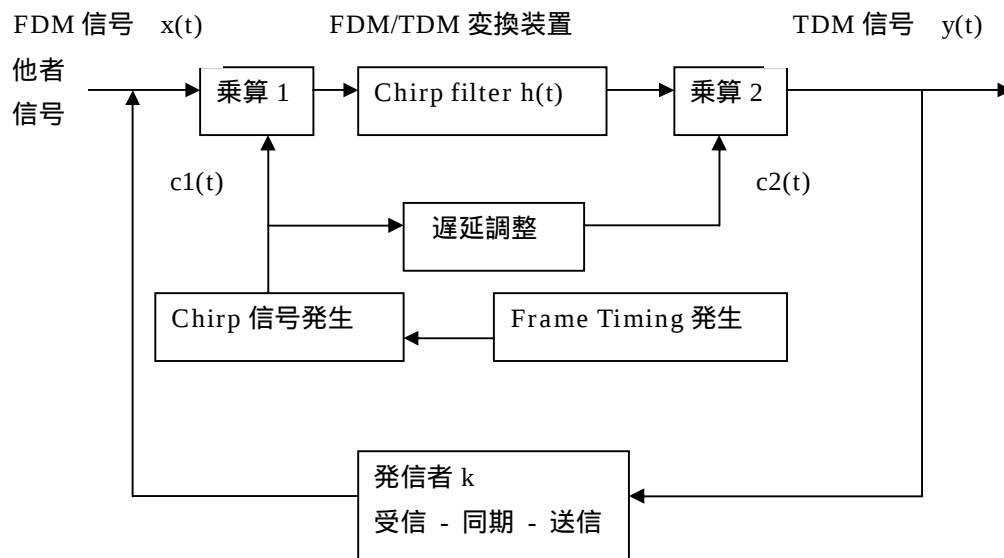


図 2-1 Chirp Z 変換による FDM/TDM 変換回路の構成

Frame 信号

これは周期 $T(\text{sec})$ の周期パルスである。

Chirp 信号

これは Frame 信号に同期して発生する次の信号である。

$$c(t) = e^{j(\omega_c t)} \sum_i g(t - i.T)$$

$$g(t) = e^{-j\mu t^2} \quad (-T/2 < t < T/2)$$

これは前述の Chirp 信号が周期 T で繰り返すものなり。f-t 図で描くとのこぎり波形をなす。

Chirp filter

インパルス応答が次のフィルタである。

$$h(t) = e^{j(\omega_f t + \mu' t^2)} \quad (-T_1 < t < T_2)$$

これは前述の Chirp フィルタと同じであるが時間の原点を周波数が ω_f なるように表現す。

FDM 信号

送信者 k ($k=1,2,\dots,K$) の信号は多重されて次式で与えられる。

$$x(t) = \sum_k [k, i] \sum_i a[k, i] \cdot w(t - T \cdot i - \varepsilon_k) \cdot e^{j(\omega_k t)}$$

ここで $a[k, i]$ は送信者 k 発の周期 i における情報データ、 $w(t)$ は振幅、 ε_k はタイミング誤差、 ω_k は搬送波周波数である。

Chirp filter 入力

$$x(t) \cdot c_1(t) = \sum_k [k, i] \sum_i a[k, i] \cdot w(t - T \cdot i - \varepsilon_k) \cdot e^{j(\omega_k t + \omega_c t - j \mu (t - i \cdot T)^2)}$$

Chirp filter 出力

前述と同様の計算により次の式が得られる。

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \int s(t) \cdot h(\tau - t) dt \\ &= \sum_k [k, i] \sum_i a[k, i] \cdot Y[k, i](\tau) \\ Y[k, i](\tau) &= e^{j(T \cdot i \cdot (\omega_c - \omega_f + \omega_k))} \\ &\quad \cdot e^{j(\omega_f \cdot \tau + \mu' \cdot (\tau - i \cdot T)^2)} \\ &\quad \cdot \int w(t - \varepsilon_k) \cdot e^{j\{(\omega_c - \omega_f + \omega_k) \cdot t - 2\mu' \cdot (\tau - i \cdot T) \cdot t + (\mu - \mu') \cdot t^2\}} dt \end{aligned}$$

ここで Chirp 率は完全に整合しているものと仮定する。即ち $\mu = \mu'$

上の積分範囲は $\tau - i \cdot T - T/2 < t < \tau - i \cdot T + T/2$ である。

今興味があるのは $\tau = i \cdot T$ の付近である。

$$\begin{aligned} Y[k, i](\tau) &= e^{j(T \cdot i \cdot (\omega_c - \omega_f + \omega_k))} \\ &\quad \cdot e^{j(\omega_f \cdot \tau + \mu' \cdot (\tau - i \cdot T)^2)} \\ &\quad \cdot e^{-j2\mu'(\tau - i \cdot T) \cdot \varepsilon_k} \\ &\quad \cdot W(2\mu'(\tau - i \cdot T - (\omega_c - \omega_f + \omega_k)/2\mu')) \end{aligned}$$

ただし

$$W(j\omega) = \int w(t) \cdot e^{j(-\omega \cdot t)} dt$$

特に

$$\begin{aligned} w(t) &= 1 & (-T/2 < t < T/2) \\ &= 0 & (\text{それ以外}) \end{aligned}$$

の時は

$$W(j\omega) = T \cdot \sin(\omega \cdot T/2) / (\omega \cdot T/2)$$

この時出力は

$$\begin{aligned} y(\tau) &= \sum_k [k, i] \sum_i a[k, i] \cdot \\ &\quad \cdot e^{j(T \cdot i \cdot (\omega_c - \omega_f + \omega_k))} \\ &\quad \cdot e^{j(\omega_f \cdot \tau + \mu' \cdot (\tau - i \cdot T)^2)} \\ &\quad \cdot e^{-j2\mu'(\tau - i \cdot T) \cdot \varepsilon_k} \end{aligned}$$

$$\cdot T \cdot \sin(\mu T(\tau - i \cdot T - (\omega_c - \omega_f + \omega_k)/2\mu)) / (\mu T(\tau - i \cdot T - (\omega_c - \omega_f + \omega_k)/2\mu))$$

とくに

$$\omega_c = \omega_f$$

$$\omega_k = k \cdot 2\pi/T \quad (\text{チャネル周波数間隔 } \Delta\omega = 2\pi/T)$$

の場合は

$$\begin{aligned} y(\tau) = & [k,i] \sum \sum a[k,i]. \\ & \cdot e^{\wedge j(T.i.\omega k)} \\ & \cdot e^{\wedge j(\omega f.\tau + \mu'.(\tau-i.T)^{\wedge 2}).} \\ & \cdot e^{\wedge -j\{2\mu'(\tau-i.T).\varepsilon k\}} \\ & \cdot T.\sin(\mu T(\tau-i.T)-k\pi)/(\mu T(\tau-i.T)-k\pi) \end{aligned}$$

チャネル k の出力は

$$\tau - i.T = k.\pi / \mu T$$

にピーク値 T を有し

$$\tau - i.T = k.\pi / \mu T + m.\pi / \mu T \quad (m = +1, +2, \dots)$$

にて 0 値をとる sinc 関数である。

従って周波数間隔 $\Delta \omega = 2 \pi / T$ の FDM (周波数分割多重) 信号が
時間間隔 $\Delta \tau = \pi / \mu T = 1/B$ の間隔の TDM (時分割多重) 信号に変換される。
 $\text{Sinc}(x) = \sin(x) / x$ の波形から相隣るチャネルの相互干渉は 0 となる。

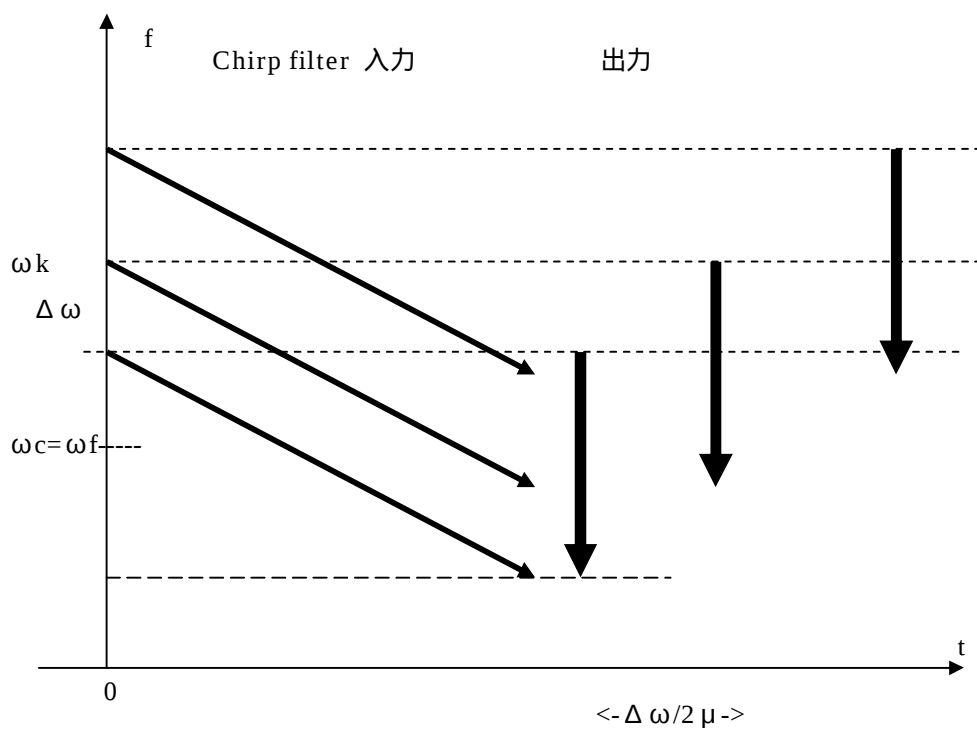


図 2-2 Chirp filter の入出力 f-t 図

Timing 制御

上の図からも分かるように Chirp 信号処理による FDM/TDM 変換においては各フレーム時間の間は各チャンネルの信号は無変化でなくてはならない。さもなければ TDM 変換後の各チャンネルのパルス波形が $\sin(x)/x$ の形から歪んでチャンネル間の干渉が生じてしまう。

特定の $i=0$ フレームにおけるチャープフィルターの出力は

$$y(\tau) = \sum_i [k,i] \sum a[k,i] \cdot Y[k,i](\tau) \quad (i=0)$$

$$= \sum_k a[k] \cdot e^{-j(\omega_f \tau + \mu \cdot \tau^2)} \cdot e^{-j(2\mu \tau \cdot \varepsilon k)} \cdot T \cdot \sin(\mu T \tau - k\pi) / (\mu T \tau - k\pi)$$

第二因子は図 2-1 の $c_2(t)$ による第二の乗算で除去される。

従って $i=0$ フレーム(他のフレームでも全く同様)におけるチャンネル k の出力信号は

$$a[k] \cdot e^{-j(2\mu \tau \cdot \varepsilon k)} \cdot T \cdot \sin(\mu T \tau - k\pi) / (\mu T \tau - k\pi)$$

となる。 $a[k]$ は情報を伝送する振幅であり $T \cdot \sin(\mu T \tau - k\pi) / (\mu T \tau - k\pi)$ は時間位置 $\tau = k \cdot \pi / \mu T$ に位置する $\sin(x)/x$ 形のパルスである。残る因子 $e^{-j(2\mu \tau \cdot \varepsilon k)}$ はタイミング誤差が位相変化の傾きとして表現されている。

位相の傾きはパルスの時間位置 $\tau = k \cdot \pi / \mu T$ の前後の標本値を取り位相比較すれば検出できる。位相の傾きは $2\mu \cdot \varepsilon k$ であり誤差検出感度は 2μ である。感度が高いので図 2-1 の発信局でタイミング誤差を検出して位相同期法などにより補正することができる。

3. Chirp filter の応用

Chirp radar は第二次世界大戦中に英国で発明されたようにレーダは極めて重要な応用分野である。FDM/TDM 変換は通信衛星や無線基地局など多数の端末局からの信号が一箇所に集まる場合に応用があると思われる。

連続信号を時間圧縮して短いパルスに変換するのは PN 信号を用いた拡散符号を受信側で時間圧縮して測位に用いる GPS 等と同様な動作である。

同じ帯域幅を用いて周波数掃引の方向に(up/down) 一ビットの情報を持たせれば Chirp filter は 2 個必要になるが復調器は簡単になる。

従って通信と測位を同時に行うシステムに新たな応用があると思われる。

-End-