

まえがき

電磁界の基礎は Maxwell の基礎方程式(1864)によって表される。更に電磁界と力学系の関係は Lorentz 力により与えられる。本小論においては Lorentz 力の本性について Maxwell の方程式と 1905 年に発表された A. Einstein の相対性理論(1905)の立場から考察する。更に電磁界における荷電粒子の運動から質量やエネルギーに関する相対論的な理論を検討する。

1. Maxwell の電磁界基礎方程式

電磁気学の包括的な基礎は J.C. Maxwell により確立された(1864)。以下の基礎方程式において $\mathbf{E}, \mathbf{H}$ はそれぞれ電界(Electric field) vector, 磁界(Magnetic field) vector であり共に位置と時間の関数である。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t \quad (1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-4)$$

ただし

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (1-5)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \cdot \mathbf{E} \quad (1-6)$$

$\mathbf{J}$ は電流密度(Electric current density)ベクトル、 $\mathbf{B}, \mathbf{D}$ はそれぞれ磁束密度(Magnetic flux density), 電束密度(Electric flux density)ベクトルである。 μ 、 ϵ は各々透磁率(permeability), 誘電率(permittivity)であり、以下において扱う等方性(isotropic)の媒質においては定数となる。

ρ は電荷密度(electric charge density)でスカラー(scalar)量である。

∇ は微分演算子であり (x, y, z) 方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とすると

$$\nabla = \mathbf{i} \partial / \partial x + \mathbf{j} \partial / \partial y + \mathbf{k} \partial / \partial z \quad (1-7)$$

式(1-1)は Ampere の法則、すなわち電流が磁界を発生する法則を示している。 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ は電流と同様の性質を有し、変位電流(Displacement current)と呼ばれる。

式(1-2)は Faraday の電磁誘導(Electro-magnetic induction)法則、すなわち磁束密度 $\mathbf{B}$ の時間変化が電界を生ずる法則を示している。

式(1.4)は Gauss の法則であり、電界と電荷の関係を与える。式(1.3)は電荷に対応する磁荷は存在しない事を物語る。

2. Lorentz 力

上の Maxwell の方程式に加えて電磁気学の基礎的なものに Lorentz 力がある。

電界 $\mathbf{E}$, 磁界 $\mathbf{B}$ の電磁界に電気量 q の粒子が速度 $\mathbf{v}$ で運動していると力 $\mathbf{f} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ を受ける。即ちベクトル積 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は等価的に電界であるがその一つの根源的な説明は 1905 年の A. Einstein による論文「運動体の電気力学」において特殊相対性理論によって与えられた[1]。アインシュタインは運動する荷電粒子が磁界の中に電界を生ずる現象を起電力と名づけた。

本節においては相対性理論によらず M. Faraday によって発見され J. C. Maxwell によって定式化された電磁誘導の方程式から起電力を直接導く事とする。

電荷 q を帯びた粒子がこの電磁界の中を速度 $\mathbf{v}$ で運動しているものとする。

電磁誘導の式を時間積分して

$$\int \nabla \times \mathbf{E} dt = -\mathbf{B}$$

すると

$$\begin{aligned} q\mathbf{v} \times \mathbf{B} &= -q \int \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{E}) dt \\ &= q \int [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})] dt \\ &= \int [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{f} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})] dt \end{aligned}$$

但し $\mathbf{f} = q \cdot \mathbf{E}$ は荷電粒子に電界が作用する力である。

他方荷電粒子の質量を m とすると力 $\mathbf{f}$ は次の様な力学的表現も可能である。

$$\mathbf{f} = q \cdot \mathbf{E} = m \cdot \partial \mathbf{v} / \partial t$$

すると

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{f} = m \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \partial \mathbf{v} / \partial t = 0$$

他方 $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})$ についてみると $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})$ は単位時間当たりの力学的な仕事でありその時間積分は仕事となる。

ここでは他にエネルギーの支出は無いのでその仕事は力学的 Potential ϕ として蓄積される筈である。

以上をまとめると

$$q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = -\nabla \phi$$

即ち $q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ は力であり従って $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は磁界と運動する荷電粒子により生ずる起電力に由来する電界である事が分かる。

例 1

一様な磁界 $\mathbf{B}$ に初速度 $\mathbf{v}$ で電荷 q を帯びた粒子が突入したとする。起電力によってこの荷電粒子が受ける力 $q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ は磁界 $\mathbf{B}$ にも速度 $\mathbf{v}$ にも直交する。即ちその荷電粒子は磁界 $\mathbf{B}$ に垂直な平面上で円軌道上の運動を行う。この運動は荷電粒子加速器 Cyclotron に応用されている。

その円の半径を r とすると円軌道の求心力は起電力に由る電界によって与えられる事から

$$m \cdot v^2 / r = q \cdot v \cdot B$$

軌道円の半径 r は

$$r = (m \cdot v) / (q \cdot B)$$

上の円運動は円の中心に固定され、電荷 q とは逆極性の電荷 q' により及ぼされる静電界的求心力による円運動に等価である。

$$-(q \cdot q') / (r^2) = q \cdot v \cdot B$$

これより

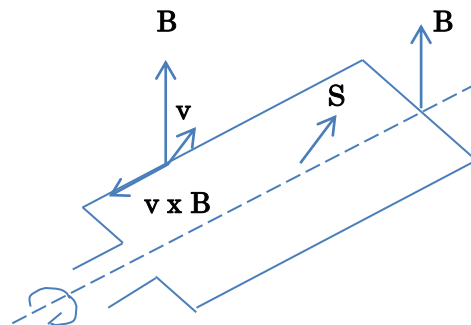
$$q' = -(m \cdot v / q)^2 / B$$

等価静電 Potencial は

$$\phi = q' / r$$

例 2

一様電界 B の中に下図のような導体の輪を外力により回転させるものとする。



上述の議論により左の輪の上では手前、下では奥行方向に起電力による電界 E が生じる。即ち導線内の荷電粒子に働く Lorentz 力を生ずる電界である。これは輪に沿った線積分により輪の両端に

$$\int E \, ds = v \cdot B \cdot 2L \cdot \sin(\theta)$$

なる電位差 V を生ずる。但し $2L$ は導体の長さ、 θ は v , B 間の角である。

上の回転子の半径を r 、回転の角速度を ω とすると回転子の速さは $v = r \cdot \omega$ であるから

$$V = 2r \cdot \omega \cdot B \cdot L \cdot \sin(\theta) \quad (\theta = \omega \cdot t \quad t; \text{時間})$$

これが M. Faraday の電磁誘導に他ならない事を以下に示す。

Faraday の電磁誘導方程式は

$$\nabla \times E = - \partial B / \partial t$$

これを上記回転子について面積分すると

$$\begin{aligned} \int \nabla \times E \, d\mathbf{S} &= - \int \partial \mathbf{B} / \partial t \, d\mathbf{S} \\ &= - [\partial / \partial t] \int \mathbf{B} \, d\mathbf{S} \\ &= - [\partial / \partial t] 2rL \cos(\theta) \end{aligned}$$

左辺は Stokes の定理により線積分となり

$$\int \nabla \times E \, d\mathbf{S} = \int E \, dl = -V$$

故に

$$V = [\partial / \partial t] 2rL \cos(\theta)$$

$$= 2r \cdot \omega \cdot B \cdot L \cdot \sin(\theta)$$

以上で Lorentz 力と電磁誘導が等価な事が示された。

この輪を外部の回路につなぐと電流が流れ、発電機として作用する。逆に外部より電流を供給すると磁界中の輪に回転力が生じ電動機として作用する。

3. 特殊相対性理論

Lorentz 力に関する別の見方がアインシュタインの相対性理論(1905)[1]から得られる。

3-1 運動学

光速一定の原理

実験によって確立された真空中の光の速度は観測者の運動状態によらず常に一定であるという事実を原理に据えて相対性理論は構築されている。即ち $c = 3 \times 10^8 \text{ (m/s)}$ 。

これは光を粒子のように考えると理解不能であるが波として考えると納得できる。電磁界の基礎を成す Maxwell の方程式から $c = 1/\sqrt{\epsilon \cdot \mu}$ となる。但し ϵ は真空の誘電率、 μ は透磁率である。真空の物理的性質は観測者の運動状態に依らない筈なのでこの原理は筆者にはとても自然な事に感じられる。

ガリレイ変換

二つの観測系 K と k があり k は K に対して x 軸方向に速度 v で等速に移動しているものとする。

観測系 K と k の時間及び空間座標をそれぞれ (t, x) , (τ, ξ) とする。古典物理学のガリレイ変換とは

$$\xi = x - v \cdot t$$

$$\tau = t$$

これは日常生活では全く自然な関係、即ち空間と時間は全く独立である事を示す。k 系で速度 w の物を K 系で観測すると速度は $v+w$ となる。 $w=c$ の場合には光速を越え得る事になり観測事実に合わない。

Lorentz 変換

光速不変の原理を満たすには K 系の座標 (t, x, y, z) と k 系の座標 (τ, ξ, η, ζ) の間には次の Lorentz 変換が成り立たなくてはならない。

$$\xi = \beta \cdot (x - v \cdot t) \quad (3.1-1)$$

$$\tau = \beta \cdot (t - v/c^2 \cdot x) \quad (3.1-2)$$

$$\eta = y \quad (3.1-3)$$

$$\zeta = z \quad (3.1-4)$$

但し

$$\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (3.1-5)$$

相対性原理

移動系 k から静止系 K を観測する場合には上の v を $-v$ としたものが同じ形で成立する筈である。

$$x = \beta \cdot (\xi + v \cdot \tau) \quad (3.1-1)'$$

$$t = \beta.(\tau + v/c^2 \cdot \xi) \quad (3.1-2)'$$

$$y = \eta \quad (3.1-3)'$$

$$z = \zeta \quad (3.1-4)'$$

四次元連続体

静止系の中では時間 t と空間 (x, y, z) は独立であるがそこから移動系を観測するとその時間と空間は最早独立では無い。時間と空間を合わせた四次元連続体を成す。

運動体の時間の遅れ

運動系 k の原点 $\xi = 0$ に置かれた時計の示す時間を静止系 K で観測すると

$$\tau = 1/\beta \cdot t = \sqrt{1 - (v/c)^2} t$$

運動体の長さの縮み

運動系の (τ_1, ξ_1) 及び (τ_2, ξ_2) なる二世界点の差は静止系において

$$x_2 - x_1 = \beta \cdot \{(\xi_2 - \xi_1) + v \cdot (\tau_2 - \tau_1)\} \quad (3.1-1)''$$

今 $\tau_2 - \tau_1 = 0$ に対しては

$$\xi_2 - \xi_1 = 1/\beta \cdot (x_2 - x_1) = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot (x_2 - x_1)$$

即ち運動物体は運動方向に縮む。ここで物体とはその中の各点の時間が一致して流れるものである。

3.2 運動体の電気力学

前述の Maxwell の方程式は静止系 $K(t, x, y, z)$ における表現である。ここでは電界 vector $\mathbf{E}$ は (x, y, z) 方向の成分 (E_x, E_y, E_z) を持つ。他の vector $\mathbf{D}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$ についても同様である。

真空における相対性原理

今移動系 $k(\tau, \xi, \eta, \zeta)$ における電界 vector を $(E'\xi, E'\eta, E'\zeta)$ と表記し微分演算子を

$$\nabla' = i\partial/\partial\xi + j\partial/\partial\eta + k\partial/\partial\zeta$$

とすると移動系 k においても静止系 K と全く同形式の Maxwell 基礎方程式が成り立つ筈である。

$$\nabla' \times \mathbf{H}' = \mathbf{J}' + \partial \mathbf{D}' / \partial \tau \quad (3.2-1)$$

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = - \partial \mathbf{B}' / \partial \tau \quad (3.2-2)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (3.2-3)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{D}' = \rho' \quad (3.2-4)$$

真空における電磁界の座標変換

真空においては

$$\mathbf{J} = 0, \quad \rho = 0 \quad (3.2-5)$$

相対性原理の要請から座標変換を行うと電界、磁界について次の変換則が成り立つ事が示される。

$$E'\xi = E_x \quad (3.2-6)$$

$$E'\eta = \beta (E_y - v.B_z) \quad (3.2-7)$$

$$E'\zeta = \beta (E_z + v.B_y) \quad (3.2-8)$$

$$B'\xi = B_x \quad (3.2-9)$$

$$B'\eta = \beta (B_y + v/c^2.E_z) \quad (3.2-10)$$

$$B'\zeta = \beta (B_z - v/c^2.E_y) \quad (3.2-11)$$

上の式の言う所は

(1) 運動系の運動方向の電磁界は変化無し。

(2) 運動と直角方向(transversal direction)には

$$\mathbf{E}'_t = \beta \cdot (\mathbf{E}_t + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_t)$$

即ち係数 $\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ が掛けられている点を除けば磁界と速度ベクトルの外積によって Lorentz 力を生じる電界が加えられる事が分かる。即ち Lorentz 力とは相対論的なものであるとも言える。

更には磁界についても

$$\mathbf{B}'_t = \beta \cdot (\mathbf{B}_t - \mathbf{v} \times \mathbf{E}_t/c^2)$$

以上より

(3) 運動方向には電界と磁界は独立であるが、運動方向と直角方向には電界と磁界はベクトル形式の Lorentz 変換により相互に変換する。一般には両者を合わせて電磁界として扱う必要がある。

3.3 電磁界の中での電子の運動

今静止系 K に対して x 方向に速度 v で移動している電子に対して移動系 k' の中で観測すると瞬時的には次の運動方程式が成立すると考えられる。

$$m \cdot [(d/d\tau)^2] \xi = e \cdot E \xi' = e \cdot E_x$$

$$m \cdot [(d/d\tau)^2] \eta = e \cdot E \eta' = e \cdot \beta (E_y - v \cdot B_z)$$

$$m \cdot [(d/d\tau)^2] \zeta = e \cdot E \zeta' = e \cdot \beta (E_z + v \cdot B_y)$$

但し m は電子の質量、e は電荷である。

上の式を Lorentz 変換により静止系に座標変換する

$$[d/d\tau]\xi = \partial\xi/\partial x \cdot dx/dt \cdot \partial t/\partial \tau$$

$$= \beta^2 \cdot dx/dt$$

$$[d/d\tau]^2 \xi = [\partial/\partial x] [\beta^2 \cdot dx/dt] \cdot \partial x/\partial \tau + [\partial/\partial t] [\beta^2 \cdot dx/dt] \cdot \partial t/\partial \tau$$

$$= \beta^3 \cdot [(d/dt)^2] x \quad \text{等々}$$

結果は

$$\beta^3 \cdot m \cdot [(d/dt)^2] x = e \cdot E \xi' = e \cdot E_x$$

$$\beta^2 \cdot m \cdot [(d/dt)^2] y = e \cdot E \eta' = e \cdot \beta \cdot (E_y - v \cdot B_z)$$

$$\beta^2 \cdot m \cdot [(d/dt)^2] z = e \cdot E \zeta' = e \cdot \beta \cdot (E_z + v \cdot B_y)$$

静止系で観察する力の形式に直すと

$$\beta^3 \cdot m \cdot [(d/dt)^2] x = e \cdot E_x = F_x$$

$$\beta \cdot m \cdot [(d/dt)^2] y = e \cdot (E_y - v \cdot B_z) = F_y$$

$$\beta \cdot m \cdot [(d/dt)^2] z = e \cdot (E_z + v \cdot B_y) = F_z$$

但し $\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z)$ は力である。

縦質量と横質量

上の式の解釈として進行方向には電子の質量が β^3 倍、それと直角方向には β 倍に増大する。電子の速度が光速に近づくとも質量が急増するため加速が困難になる。そのため光速には決して到達できない。

3.4. 相対性理論的質量と運動量及び Energy

位置や電磁界は **vector**、即ち方向を持つ物理量であるから運動方向によって異なる特性を持つのも分かるが質量は **scalar** である。量だけあって方向を持たないものに縦、横の別があるのは不自然である。

座標時と固有時

前述の Lorentz 変換の変数は座標時であった。移動系の原点に置かれた時計の示す時刻は静止系に比べて遅れるが、実は静止系における時間の歩みが場所によらないように移動系においてもその時の流れはその場所によらない筈である。それを移動系の固有時と呼び σ で表す事にしよう。すると

$$d\sigma = \sqrt{1 - (v/c)^2} \cdot dt$$

$$d\sigma/dt = \sqrt{1 - (dx/dt/c)^2}$$

移動系における時間微分を固有時で書き直す。

$$\begin{aligned} [d/dt]x &= d\sigma/dt \cdot dx/d\sigma \\ &= dx/d\sigma \cdot \sqrt{1 - (dx/dt/c)^2} \end{aligned}$$

これより

$$dx/dt = dx/d\sigma / \sqrt{1 - (dx/d\sigma)/c^2}$$

更に x について t による二階微分は

$$\begin{aligned} [d/dt]^2 x &= [d/dt] [dx/dt] \\ &= 1/\beta^3 \cdot [d/dt] (dx/d\sigma) \end{aligned}$$

同様に y, z についても

$$\begin{aligned} dy/dt &= dy/d\sigma \cdot d\sigma/dt \\ &= 1/\beta \cdot dy/d\sigma \end{aligned}$$

$$[d/dt]^2 y = 1/\beta \cdot [d/dt] (dy/d\sigma)$$

及び

$$[d/dt]^2 z = 1/\beta \cdot [d/dt] (dz/d\sigma)$$

以上をまとめると

位置ベクトル

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

について

$$[d/dt] \mathbf{p} = \mathbf{F}$$

が得られる。ここで $\mathbf{p}$ は運動量

$$\mathbf{p} = m \cdot d\mathbf{r}/d\sigma$$

である。

相対論的運動量と質量

上の式をすべて静止系の座標で表すと

$$\begin{aligned} [d/dt] \mathbf{p} &= m \cdot [(d/dt)^2] \mathbf{r} \cdot dt/d\sigma \\ &= \beta \cdot m \cdot [(d/dt)^2] \mathbf{r} \\ &= \mathbf{F} \end{aligned}$$

これは運動体の質量が方向によらず $\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 倍に増大する事を示している。

電子に固定された座標系での表現形式

電子に固定された座標系を $(c \cdot \sigma, \xi, \eta, \zeta)$ とする。 σ は電子座標系の固有時であり、静止系の時 t に対してゆっくり流れる。

$$d\sigma/dt = \sqrt{1 - (dx/dt/c)^2}$$

固有時を用いた電子系での電子の運動方程式は

$$\begin{aligned} [d/d\sigma][m \cdot (d/d\sigma)] \xi &= e \cdot E \xi' = e \cdot E_x \\ [d/d\sigma][m \cdot (d/d\sigma)] \eta &= e \cdot E \eta' = e \cdot \beta (E_y - v \cdot B_z) \\ [d/d\sigma][m \cdot (d/d\sigma)] \zeta &= e \cdot E \zeta' = e \cdot \beta (E_z + v \cdot B_y) \end{aligned}$$

他方運動体は進行する x 方向に時間だけでなく空間も縮む事を前に見たので

$$d\xi/dx = 1/\beta = \sqrt{1 - (dx/dt/c)^2}$$

故に

$$(d/d\sigma) \xi = d\xi/d\sigma = d\xi/dx \cdot dx/dt \cdot dt/d\sigma = dx/dt$$

故に

$$\begin{aligned} [d/d\sigma][m \cdot (d/d\sigma)] \xi &= [d/d\sigma][m \cdot (d/dt)] x = [dt/d\sigma][m \cdot (d/dt)^2] x \\ &= m \cdot \beta [(d/dt)^2] x \\ &= e \cdot E_x \end{aligned}$$

結局

$$\begin{aligned} \beta \cdot m \cdot [(d/dt)^2] x &= e \cdot E_x &= F_x \\ \beta \cdot m \cdot [(d/dt)^2] y &= e \cdot (E_y - v \cdot B_z) &= F_y \\ \beta \cdot m \cdot [(d/dt)^2] z &= e \cdot (E_z + v \cdot B_y) &= F_z \end{aligned}$$

が得られる。

相対論的エネルギー

以上より x は特別な方向ではない事が示されたので x を位置ベクトル $\mathbf{r}$ に置き換える。

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}/dt &= (d\mathbf{r}/d\sigma) \cdot (d\sigma/dt) \\ &= (d\mathbf{r}/d\sigma) \cdot \sqrt{1 - ((d\mathbf{r}/dt)/c)^2} \\ &= (d\mathbf{r}/d\sigma) / \sqrt{1 + ((d\mathbf{r}/d\sigma)/c)^2} \\ d\sigma/dt &= \sqrt{1 - ((d\mathbf{r}/dt)/c)^2} \\ &= 1 / \sqrt{1 + ((d\mathbf{r}/d\sigma)/c)^2} \end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned} m \cdot c^2 \cdot [d/dt] (dt/d\sigma) &= m \cdot c^2 \cdot [d/dt] \sqrt{1 + ((d\mathbf{r}/d\sigma)/c)^2} \\ &= (d\mathbf{r}/d\sigma) \cdot m \cdot [d/dt] (d\mathbf{r}/d\sigma) / \sqrt{1 + ((d\mathbf{r}/d\sigma)/c)^2} \\ &= (d\mathbf{r}/d\sigma) / \sqrt{1 + ((d\mathbf{r}/d\sigma)/c)^2} \cdot m \cdot [d/dt] (d\mathbf{r}/d\sigma) \\ &= d\mathbf{r}/dt \cdot \mathbf{F} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \\ &= dE/dt \end{aligned}$$

これは Energy の変化率である。ここで E は運動体のエネルギーである。

これより

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \cdot (dt/d\sigma) \\ &= m \cdot c^2 / \sqrt{1 - v/c^2} \\ &= m \cdot c^2 + 1/2 m \cdot v^2 \quad (v/c \ll 1) \end{aligned}$$

第一項は静止エネルギー、第二項は運動エネルギーである。

静止エネルギーは質量とエネルギーの等価性を示す。

参考文献

[1] 内山龍雄 「アインシュタイン相対性理論」 岩波文庫