無線工学の基礎[1]　　　　アンテナ工学の基礎

アンテナ工学には電磁界に関する物理学的基礎と通信に関する回路網理論的基礎の二面がある。
ここではそれらの理論的基礎を出来る限り厳密にかつ分かり易く解説する。

2007/8/9 市吉　修　(at my cottage)

目次

1. Maxwell の電磁界基礎方程式

電界や磁界はベクトル量でありそれぞれ E,H で表す。E,H はそれぞれ電界(Electric field) vector, 磁界(Magnetic field) vector であり共に位置と時間の関数である。
電磁界は次の Maxwell の基礎方程式に従う。

$$\nabla \times H = J + \partial D/\partial t \qquad (1\text{-}1)$$
$$\nabla \times E = -\partial B/\partial t \qquad (1\text{-}2)$$
$$\nabla \cdot B = 0 \qquad (1\text{-}3)$$
$$\nabla \cdot D = \rho \qquad (1\text{-}4)$$

ただし

$$B = \mu \cdot H \qquad (1\text{-}5)$$
$$D = \varepsilon \cdot E \qquad (1\text{-}6)$$

J は電流密度(Electric current density)ベクトル、B,D はそれぞれ磁束密度(Magnetic flux density), 電束密度(Electric flux density)ベクトルである。μ、ε は各々透磁率(permeability), 誘電率(permittivity)であり、以下において扱う等方性(isotropic)の媒質においては定数となる。
ρ は電荷密度(electric charge density)でスカラー(scalar)量である。

式(1-1)は Ampere の法則、すなわち電流が磁界を発生する法則を示している。$\partial D/\partial t$ は電流と同様の性質を有し、変位電流(Displacement current)と呼ばれる。
式(1-2)は Faraday の電磁誘導(Electro-magnetic induction)法則、すなわち磁束密度 B の時間変化が電界を生ずる法則を示している。

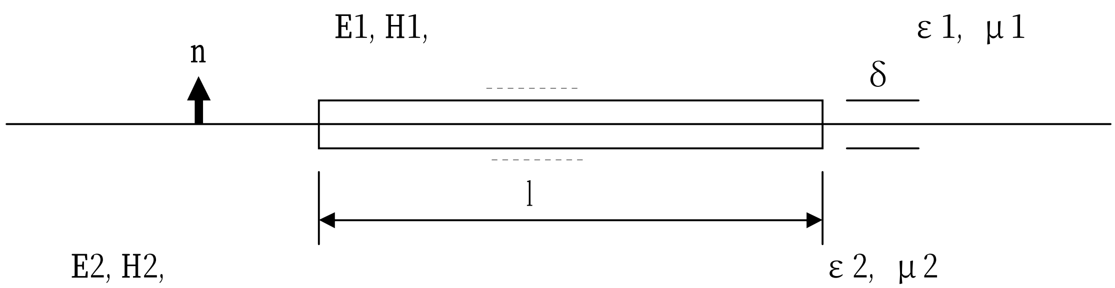
式(1-4)は Gauss の法則、即ち電束密度ベクトル D と電荷密度 ρ の関係を示している。
式(1-3)は単独の磁荷が存在しないことを示している。

連続の方程式
式(1-1)の両辺の発散を取ると　　$\nabla \cdot J + \partial (\nabla \cdot D) / \partial t = 0$
式(1-4)より

$$\nabla \cdot J + \partial \rho / \partial t = 0 \tag{1-7}$$

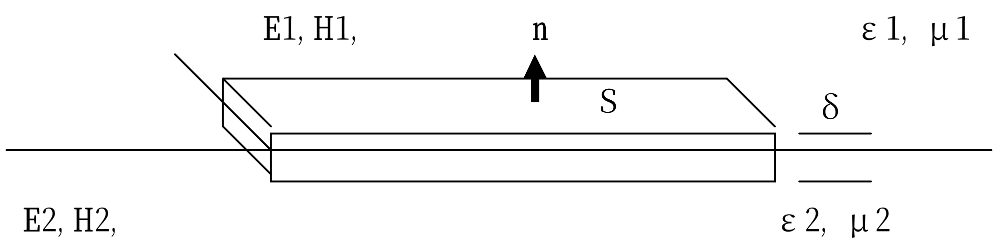
これは連続の方程式(Continuity equation)である。電荷の変化が電流に他ならないことを示す。

境界条件 Boundary conditions
媒質 1,2 が境界をなしているときそれぞれの電磁界 E1,H1,及び E2,H2 には境界面では次の関係が成り立つ。



媒質 1,2 の境界に上図のように幅 δ、長さ l の長方形を取り、周辺の方向は左回りに方向を取るものとする。
式 1-1 を上の長方形で積分すると　$\int \nabla \times H \; dS = \int J \, dS + \int \partial D / \partial t \, dS$
Stokes の定理により左辺は　$\int \nabla \times H \; dS = \int H \, ds = (H1t - H2t).l + (H1n - H2n).\delta$
ただし Ht は H の接線(tangential)成分、Hn は H の法線(normal)成分を表す。
右辺は $\int J \, dS + \int \partial D / \partial t \, dS = (J + \partial D / \partial t).\delta.l.t$　ただし t は接線方向の単位ベクトルであり向きは紙面に垂直で読者方向である。
$\delta \rightarrow 0$ とすると$(J + \partial D / \partial t).\delta.l.t \rightarrow Js.l$ となる。ただし Js は面電流(surface current)である。
従って H に関する境界条件は　$H1t - H2t = Js$
電界に対しては式 1-2 にたいして上と同様の計算を行うと $E1t - E2t = 0$ が得られる。

次に下のように境界面を含む面積 S,厚み δ の立体空間を設定し、式 1-4 に体積分を適用すると



$\int \nabla \cdot D \; dv = \int \rho \, dv$ となる。左辺は Gauss の定理により $\int \nabla \cdot D \; dv = \int D . dS$
右辺は $\int \rho \, dv = \rho . S . \delta$
$\delta \rightarrow 0$ とすると $D1n - D2n = \rho s$ 但し ρs は面電荷(surface charge)であり $\rho . \delta \rightarrow \rho s$
同様に式 1-3 について計算を行うと $B1n - B2n = 0$

以上は境界面上の単位法泉ベクトル n を用いて次のように簡潔に表現される。

$$n \times (H1 - H2) = Js \quad (1\text{-}8)$$
$$n \times (E1 - E2) = 0 \quad (1\text{-}9)$$
$$n . (D1 - D2) = \rho s \quad (1\text{-}10)$$
$$n . (B1 - B2) = 0 \quad (1\text{-}11)$$

Poynting vector
今ある有限な領域 V の電磁界について次の量を考える。

$$\nabla .(E \times H) = - E.(\nabla \times H) + H.(\nabla \times E) \quad (1\text{-}12)$$

これに Maxwell の方程式を適用して計算すると次の関係が得られる。

$$\nabla .(E \times H) = - E..J - \partial^*/\partial t\{ 1/2(\varepsilon E.E + \mu H.H) \} \quad (1\text{-}13)$$

ただし$\partial^*/\partial t\{X\} = \partial X/\partial t$ を示す。

これに領域 V の体積分を行い、発散定理を用いて体積分を面積分に変換すると

$$[V\text{ の表面}] \int (E \times H) \, n \, dS$$
$$+ [V] \int \{ E..J \, dv + \partial^*/\partial t \, [V] \int 1/2(\varepsilon E.E + \mu H.H) \, dv = 0 \quad (1\text{-}14)$$

但し n dS は表面の外向き法線面素である。

今電荷 q が電界 E,磁界 B の中を速度 v で運動すると力 $F = q.(E + v \times B)$ を受ける。 ところが F. v は運動エネルギーWm の時間微分に他ならないから $d(Wm)/dt = q \, E.v$ となる。
今の場合は連続媒質を扱っているので電荷 q の代わりに電荷密度 ρ を用いると $\rho v = J$ に他ならないから

$$E..J = d(Wm)/dt \quad (1\text{-}15)$$

である。 E..J は各電荷要素の F. v の単位体積当たりの総和であるから消費エネルギーであり、Wm は単位体積当たりの運動エネルギーに他ならない。

以上に対応して $1/2(\varepsilon E.E + \mu H.H)$は単位体積当たりの電磁界(field)エネルギーと解釈される。

$$Wf = 1/2(\varepsilon E.E + \mu H.H) \quad (1\text{-}16)$$

と表記すると式 1-14 は

$$[V\text{ の表面}] \int (E \times H) \, n \, dS + \partial^*/\partial t \, [V] \int (Wm + Wf) \, dv = 0 \quad (1\text{-}17)$$

第二項は領域 V の中の運動エネルギーと電磁エネルギーの総和の時間微分であるから第一項は領域Vから単位時間当たりに領域Vから外部に流出するエネルギー量でなくてはならない。従って E x H は単位時間及び単位面積あたりのエネルギーの流れ、即ち単位面積あたりの電力の流れを表す物理量であると解釈される。これを Poynting vector と称する。

$$P = E \times H \quad (\text{Watts/m}^2) \quad (1\text{-}18)$$

2. Helmholtz の波動方程式

式(1-1)の両辺に rotation を作用すると

$$\nabla \times \nabla \times H = \nabla \times J + \varepsilon . \partial(\nabla \times E)/\partial t$$

$$= \nabla \times J - \varepsilon \mu .[\partial^2/\partial t^2] H$$

上の左辺は Vector 解析の公式より

$$\nabla \times \nabla \times H = \nabla \cdot (\nabla \cdot H) - (\nabla \cdot \nabla) \cdot H$$

等方性の媒質においては右辺の第一項は 0 となる。
従って

$$(\nabla \cdot \nabla) \cdot H + \nabla \times J - \varepsilon \mu .[\partial^2/\partial t^2] H = 0$$

あるいは

$$[\nabla^2 - \varepsilon \mu .(\partial/\partial t)^2] H = - \nabla \times J \quad (2\text{-}1)$$

となる。
同様に電界についても次式が導かれる。

$$[\nabla^2 - \varepsilon \mu .(\partial/\partial t)^2] E = 1/\varepsilon . \nabla \rho + \mu .[\partial/\partial t] J \quad (2\text{-}2)$$

以下においては時間変化は $e^{j\omega t}$ に従う場合を扱う。
この場合時間の微分演算が $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$.と置き換えられ、上の式は次の形式を取る。

$$[\nabla^2 + k^2] H = - \nabla \times J \quad (2\text{-}3)$$

$$[\nabla^2 + k^2] E = 1/\varepsilon . \nabla \rho + j\omega \mu J \quad (2\text{-}4)$$

ただし

$$k = \omega . \sqrt{(\varepsilon \mu)} \quad (2\text{-}5)$$

であり、伝搬定数(Propagation constant)と呼ばれる。

電流や電荷が無い自由空間においては

$$[\nabla^2 + k^2] H = 0 \quad (2\text{-}6)$$

$$[\nabla^2 + k^2] E = 0 \quad (2\text{-}7)$$

これらは Helmholtz の波動方程式(Wave equation)と呼ばれる。

3. Vector potential, Scalar potential 及び Hertz vector

上の導出過程において電磁界の基礎方程式の微分を行ったが、その過程で失われる情報がある。
ここでは Potential を導入して電磁界を統一的に扱う手法を解説する。

Vector potential, Scalar potential

式(1-3)によると磁束密度の湧き出し(発散)は $\nabla \cdot B = 0$ である。この事から次式の Vector potential A を導入する。

$$B = \nabla \times A \quad (3\text{-}1)$$

これを式(1-2) ; $\nabla \times E = - \partial B/\partial t$ に代入すると $\nabla \times (E + \partial A/\partial t) = 0$
任意のスカラー関す数 ϕ に対して $\nabla \times \nabla \phi = 0$ であるから

$$E = - \nabla \phi - \partial A/\partial t \quad (3\text{-}2)$$

ϕ をスカラーポテンシャル(scalar potential)と呼ぶ。

これは丁度静電気学の一般化となっている事が分かる。

これらを式(1-1)に代入すると $\nabla\times\nabla\times A = \mu J + \mu\partial D/\partial t = \mu J + \mu\varepsilon\partial/\partial t(-\nabla\phi - \partial A/\partial t)$
$\nabla\times\nabla\times A = \nabla(\nabla A) - \nabla^2 A$ であるから

$$[\nabla^2 - \varepsilon\mu(\partial/\partial t)^2]A = -\mu J + \nabla(\nabla A + \mu\varepsilon\,\partial\phi/\partial t) \qquad (3\text{-}3)$$

式(3-2) ; $E = -\nabla\phi - \partial A/\partial t$ を式(1-4) ;$\nabla\cdot D = \rho$ に代入すると $\nabla\cdot(-\nabla\phi - \partial A/\partial t) = \rho/\varepsilon$
$\nabla^2\phi = -\rho/\varepsilon - \nabla(\partial A/\partial t)$　そこで両辺に $-\varepsilon\mu(\partial^*/\partial t)^2\phi$ を加えると

$$[\nabla^2 - \varepsilon\mu(\partial/\partial t)^2]\phi = -\rho/\varepsilon + \partial/\partial t(\nabla A + \mu\varepsilon\,\partial\phi/\partial t) \qquad (3\text{-}4)$$

式(3-3),(3-4)を比較すると次の Lorentz 条件

$$\nabla A + \mu\varepsilon\,\partial\phi/\partial t = 0 \qquad (3\text{-}5)$$

を満足するように Vector potential A と Scalar potential ϕ の式を定義すれば各方程式が分離されて

$$[\nabla^2 - \varepsilon\mu(\partial/\partial t)^2]A = -\mu J \qquad (3\text{-}6)$$

$$[\nabla^2 - \varepsilon\mu(\partial/\partial t)^2]\phi = -\rho/\varepsilon \qquad (3\text{-}7)$$

となる。

時間変化が $e^{j\omega t}$ の場合には $\partial/\partial t \rightarrow j\omega$ として Lorentz 条件は $\nabla A + j\omega\mu\varepsilon\phi = 0$ となるので
電磁界は

$$H = 1/\mu\,\nabla\times A \qquad (3\text{-}8)$$

$$E = -j\omega\{A + 1/k^2\,\nabla(\nabla A)\} \qquad (3\text{-}9)$$

となり統一的に記述される。

Lorentz 条件について

Lorents 条件を満足する A と ϕ は唯一ではない。$A' = A + \nabla\psi$ (ψ はスカラー関数)も $\nabla\times A' = B$ となり同じ磁界を生ずるので Vector potential としては等価である。この時 A' と ϕ が同じく Lorentz 条件を満たす為には $\nabla A' + \mu\varepsilon\,\partial\phi/\partial t = \nabla A + \mu\varepsilon\,\partial\phi/\partial t + \nabla^2\psi = \nabla^2\psi = 0$,即ち ψ は Laplace の方程式を満たす必要がある。

Coulomb gauge

Vector potential A' として $\nabla A' = 0$ なるものを採用すれば Lorentz 条件から $\partial\phi/\partial t = 0$ となる。そこで

$$[\nabla^2 - \varepsilon\mu(\partial/\partial t)^2]A' = -\mu J + \nabla\mu\varepsilon\,\partial\phi/\partial t$$

$$[\nabla^2]\phi = -\rho/\varepsilon$$

なる連立方程式により A', ϕ を求める必要がある。それから電磁界を求めるには A,ϕ と同じく式(3-1),(3-2)を用いれば良い。

Hertz vector Π

ヘルツベクトル Π はベクトルポテンシャルから次式により定義される。

$$\Pi = A/(j\omega\mu\varepsilon) \qquad (3\text{-}10)$$

Hertz vector を用いると
Lorentz 条件

$$\nabla\Pi + \phi = 0 \qquad (3\text{-}11)$$

Helmholtz の方程式;

$$[\nabla^2 - \varepsilon\mu.(\partial/\partial t)^2]\ \Pi = -1/j\omega\varepsilon.J \tag{3-12}$$

電磁界の表現

$$H = j\omega\varepsilon.\nabla\times\Pi \tag{3-13a}$$

$$E = \nabla\nabla\Pi + k^2.\Pi \tag{3-13b}$$

平面波

電流の無い媒質中における Helmholtz の波動方程式は

$$[\nabla^2 + k^2]\ \Pi = 0 \tag{3-14}$$

ここで　$k^2 = \omega^2.\varepsilon\mu$　(3-15)

Laplacian　;　$\nabla^2 = (\partial/\partial x)^2 + (\partial/\partial y)^2 + (\partial/\partial z)^2$

今$\Pi = \mathbf{c}.X(x).Y(y).Z(z)$なる変数分離解の形を仮定する。ただし $\mathbf{c}$ は任意の定ベクトルである。

すると　$[(d/dx)^2]X/X + [(d/dy)^2]Y/Y + [(d/dz)^2]Z/Z = -k^2$

となる。これが常に成り立つ為には左辺の各項が定数でなくてはならない。即ち

$$[(d/dx)^2]X/X = -k1^2,\quad [(d/dy)^2]Y/Y = -k2^2,\quad [(d/dz)^2]Z/Z = -k3^2$$

$$k1^2 + k2^2 + k3^2 = k^2$$

これより　$X(x) = e^{(-j.k1.x)}$等の解となりヘルツベクトルは

$$\Pi = \mathbf{c}.e^{\{j(\omega.t - k1.x - k2.y - k3.z)\}}$$

$$= \mathbf{c}.e^{\{j(\omega.t - \mathbf{k}.\mathbf{r})\}}$$

ただし　$\mathbf{r} = (x,y,z)$ なる位置ベクトルであり $\mathbf{k} = (k1, k2, k3)$は伝搬定数ベクトルである。

位相速度 Phase velocity

一定位相 C なる点の集合は位相平面(Phase plane)を成し、その方程式は $C = \omega.t - \mathbf{k}.\mathbf{r}$ となる。

両辺の時間微分をとると　$0 = \omega - \mathbf{k}.\mathbf{v}$ となる。　ただし $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$

位相の変化は伝搬定数 vector $\mathbf{k}$ の方向で最小となる。これを位相速度と呼び Vp で表す。

$$Vp = \omega/k = 1/\sqrt{(\varepsilon\mu)} \tag{3-16}$$

等位相平面は伝搬ベクトル $\mathbf{k}$ と直交する。即ち等位相平面は伝搬ベクトル $\mathbf{k}$ の方向に位相速度 Vp で伝搬して行く。

平面波の電磁界

ヘルツベクトルより求めると次式で表される。

$$H = j\omega\varepsilon.\nabla\times\Pi = \omega\varepsilon.\mathbf{k}\times\mathbf{c}.e^{\{j(\omega.t - \mathbf{k}.\mathbf{r})\}}$$

$$E = \nabla\nabla\Pi + k^2.\Pi = \{-(\mathbf{c}.\mathbf{k})\mathbf{k} + k^2.\mathbf{c}\}.e^{\{j(\omega.t - \mathbf{k}.\mathbf{r})\}}$$

これより次のことが分かる。

(1) 電磁界 H , E は伝搬ベクトル.$\mathbf{k}$ に直交する。 即ち平面波は電磁界が進行方向に成分を持たない横波(transversal wave)である。
(2) H と E は直交する。
(3) E と H の大きさの比　$Zo = |E|/|H = \sqrt{(\mu/\varepsilon)}$　(3-17)
　　これを媒質の固有インピーダンス(intrinsic impedance)と言う。
(4) Poynting vector ; $E \times H^* = \omega\varepsilon.(\mathbf{k}\times\mathbf{c})^2.\mathbf{k}$
　　即ち電力は伝搬ベクトル $\mathbf{k}$ の方向に流れる。

4.　Green 関数による電磁界の一般解

以降では空間の限られた領域にある電流密度 J (r’)および電荷密度 ρ ((r’)により空間の点 P(r)に生ずる電磁界を扱う。ここで r’は源領域の位置ベクトル、r は観測点 P の位置ベクトルである。
また時間変化は e^(jωt)に従うものとする。

ベクトル及びスカラーポテンシャルの満足する式は、

$$[\nabla^2 + k^2]\, A(r) = -\mu J(r') \qquad (4\text{-}1)$$

$$[\nabla^2 + k^2]\, \phi(r) = -\rho(r')/\varepsilon \qquad (4\text{-}2)$$

となる。

Green 関数　G(r, r’)

は次の式で定義される。

$$[\nabla^2 + k^2]\, G(r, r') = \delta(r - r') \qquad (4\text{-}3)$$

ただしデルタ関数(delta function)は

$$\delta(r - r') = 0 \quad (r \neq r') \qquad (4\text{-}4)$$

任意の関数 F(r’) に対して次の体積分公式を満足する。

$$\int F(r')\,\delta(r - r')\, dv' = F(r). \qquad (4\text{-}5)$$

Green 関数による一般解

上述よりベクトル及びスカラーポテンシャルの一般解は次の積分形式で表現される。

$$A(r) = -\int \mu\, J(r')\, G(r, r')\, dv' \qquad (4\text{-}6)$$

$$\phi(r) = -\int (1/\varepsilon)\, \rho(r')\, G(r, r')\, dv' \qquad (4\text{-}7)$$

三次元点源の Green 関数

上のデルタ関数は R = r - r’のみの関数であり∇は変数 R と r について共通であるから
G(r, r’) = G(R)であり上の定義方程式は

$$[\nabla^2 + k^2]\, G(R) = \delta(R) \qquad (R = r - r') \qquad (4\text{-}8)$$

またデルタ関数は点源であるから球対象であり同じく Green 関数 G(R)も球対称な関数でなくてはならない。即ち球座標 (R, φ, θ)に対して R のみに依存する関数である。G(R) = G(R)
球座標の Laplacian により

$$\left[\frac{1}{R^2}\frac{d}{dR}\left(R^2 \frac{d}{dR}\right) + k^2\right] G(R) = \delta(R) = 0 \quad (R \neq 0)$$

(d*/dR は微分演算を表す。) 上の式は次のように変形できる。

$$\left[\frac{d^2}{dR^2}\right](G R) + k^2 (G R) = 0 \qquad (4\text{-}9)$$

故に

$$G(R) = -\frac{1}{4\pi R}\, e^{-jkR} \qquad (4\text{-}10)$$

ここで e^(-j.k.R)の代わりに e^(j.k.R)を取っても微分方程式を満足するが位相速度 Vp = - ω/k となり R = 0 に向かって落ち込む解、即ち R = 0 が吸い込み口(Sink)である場合に相当する。
ここでは R = 0 は電磁界の発生源(Source)である場合を対象としているので e^(-j.k.R)を採用する。
また因子- 1/4π は Green 関数が定義式(4-8)及び(4-5)を満たす必要から決定される。

Helmholtz 積分によるベクトル、スカラーポテンシャル及び Hertz vector

以上より

$$A(r) = \frac{1}{4\pi}\int \mu\, J(r')/R\; e^{-jkR}\, dv' \qquad (4\text{-}11)$$

$\phi(\mathbf{r}) = 1/(4\pi) . \int (1/\varepsilon). \rho(\mathbf{r}')/R . e^{(-j.k.R)}\, dv'$ (4-12)

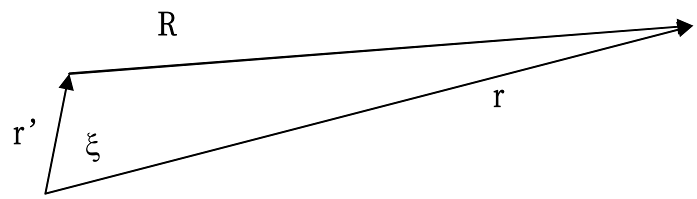
$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = 1/(4\pi j\omega\varepsilon). \int \mathbf{J}((\mathbf{r}')/R . e^{(-j.k.R)}\, dv'$ (4-13)

ただし $\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$,　$R = |\mathbf{R}|$

電磁界は式 3-1.2, 3-13a,b から求めることができる。

遠方から観測するポテンシャル

$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}'$において電磁界の源が有限の空間に限られている場合には遠方から観測したポテンシャルは次のように近似される。



上の位置ベクトル関係において　$R^2 = r^2 + r'^2 - 2r.r'.\cos(\xi)$

観測点が十分遠方にあるから $r >> r'$であり　$R\ (=)\ r - r'.\cos(\xi)$

$1/R . e^{(-j.k.R)}\ (=)\ 1/r.e^{(-jk.r)} . e^{(jk.\cos(\xi))}$

この近似によりベクトルポテンシャルは次のように近似される。

$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu/(4\pi r) . e^{(-jk.r)} .<\mathbf{J}[\cos(\xi)]>$ (4-14)

ただし　$<\mathbf{J}[x]> =. \int \mathbf{J}((\mathbf{r}') . e^{(j.k.x)}\ dv'$ (4-15)

$<\mathbf{J}\ [\cos(\xi)]>$は電流源 $\mathbf{J}((\mathbf{r}')$に重み $e^{(jk.\cos(\xi))}$をかけて積分したベクトル量である。この重みは観測方向に依存して r には依存しないから球座標 (r,θ, φ)では (θ, φ)のみに依存する。

そこで$<\mathbf{J}[\cos(\xi)]> = <\mathbf{J}[\theta, \varphi]>$と表記すると

$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \mu/(4\pi r) . e^{(-jk.r)} . <\mathbf{J}[\theta, \varphi]>$ (4-16)

となり変数分離形式で表現される。

これからベクトルポテンシャルの方向は(θ, φ)に依存し、大きさは r に依存する。r に対する依存形式は $G(r) = 1/(4\pi r) . e^{(-jk.r)}$、すなわち Green 関数である。

スカラーポテンシャルとヘルツベクトルも同様に

$\phi(\mathbf{r}) = 1/(4\pi\varepsilon r). e^{(-jk.r)} . <\rho[\cos(\xi)]>$ (4-17)

$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = 1/(4\pi j\omega\varepsilon r). e^{(-jk.r)}. <\mathbf{J}\ [\cos(\xi)]>$ (4-18)

電磁界はヘルツベクトルを用いると 式 3-13 より $\mathbf{H} = j\omega\varepsilon.\nabla \times \mathbf{\Pi}$ 、 $\mathbf{E} = \nabla\nabla\mathbf{\Pi} + k^2.\mathbf{\Pi}$ として求められる。

電磁界に起因するヘルツベクトル

今ある有限領域に電磁界がありそこに開口面(Aperture)があるとそこから外部に電磁界が放射される。従って開口面で定義されるヘルツベクトルがある筈である。

開口面の外部が真空であるとすると境界条件より開口面の表面には式(1-8)より $\mathbf{n} \times \mathbf{H}i = \mathbf{J}s$ なる面電流があることになる。従ってヘルツベクトルは

$\mathbf{\Pi}(\mathbf{r}) = 1/(4\pi j\omega\varepsilon r). e^{(-jk.r)}. <\mathbf{J}\ [\cos(\xi)]>$ (4-18)

但し　$<\mathbf{J}\ [\cos(\xi] > =.[\text{開口面}] \int \mathbf{n} \times \mathbf{H}i . e^{(j.k.\cos(\xi))}\ dS$ (4-19)

特に内部電界 Ei が内向き単位法線ベクトル n、及び内部磁界 Hi に垂直な場合には Ei = n x Hi であるから

$$\Pi(r) = 1/(4\pi j\omega\varepsilon r).e^{\wedge}(-jk.r).[\text{開口面}]\int Ei.e^{\wedge}(j.k.\cos(\xi))\,dS$$

$$= 1/(4\pi j\omega\varepsilon r).e^{\wedge}(-jk.r).<Ei[\cos(\xi)]> \quad (4\text{-}20)$$

開口面アンテナの放射電界

上のヘルツベクトルによる電界は E = ∇∇Π + k^2.Π により計算される。
特に開口面に垂直な方向の遠方電磁界は cos(ξ) = 0 であることを反映して計算すると

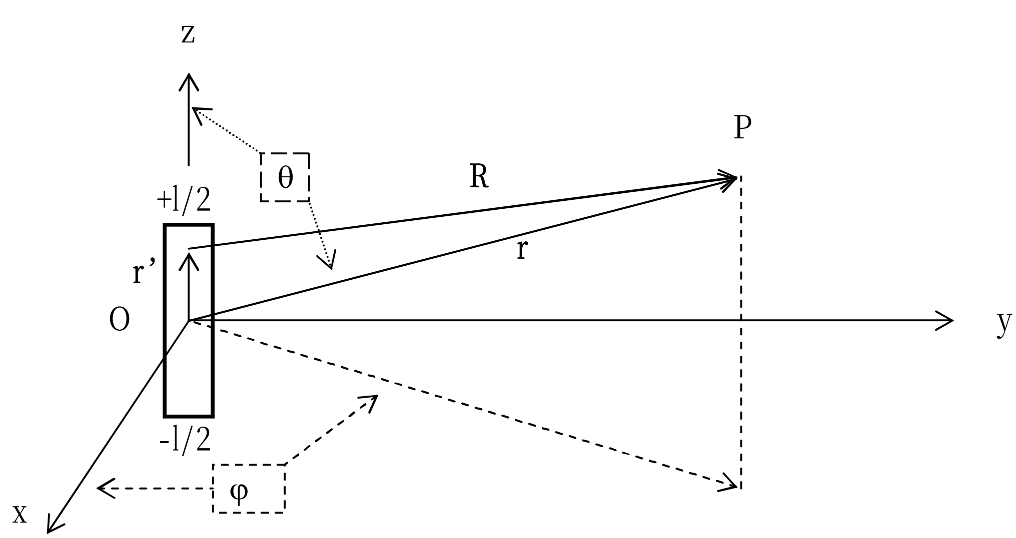
$$E(r,[\xi=\pi/2]) = j/(\lambda r).e^{\wedge}(-jk.r).<Ei[0]> \quad (4\text{-}21)$$

但し λ は電磁波の波長である。波数ベクトル k との間には次の関係がある。

$$\lambda.k = 2\pi \quad (4\text{-}22)$$

5.　**微小 Dipole による電磁界**

下図のように長さ l なる導体に電流 I が流れる場合の遠方の観測点 P における電磁界を求める。



導体の長さは微小なので電流 I は導体の各点で一様であると考えてよい。

電流は　$J = I.<z]$　　$(-l/2 < z < l/2)$　　(5-1)

但し$<z]$は z 方向の単位ベクトルである。

点 P から観測した Hertz vector は

$$\Pi(r) = 1/(4\pi j\omega\varepsilon r).\ e\hat{}(-jk.r).\ <J\ [\cos(\xi)]> \qquad (4\text{-}18)$$

ここで. $\xi = \theta$であるから

$$<J\ [\cos(\xi)]> = <z].I\int e\hat{}(j.k\ z.\cos(\theta)\ dz = <z].\ I..\ 2.\sin\ (k.l/2.\cos(\theta)\ )\ /\ (k.\cos(\theta))$$

$$(=)\quad <z].\ (I.l) \quad (\ k.l << 1\ ) \qquad (5\text{-}2)$$

故にHertz　vectorは

$$\Pi(r) = <z].\ (I.l)\ /\ (4\pi j\omega\varepsilon r).\ e\hat{}(-jk.r). \qquad (5\text{-}3)$$

ここでz方向の単位ベクトルを球座標で表すと

$$<z] = \cos(\theta).<r]\ -\ \sin(\theta).<\theta] \qquad (5\text{-}4)$$

但し$<r]$,$<\theta]$はそれぞれ r ,θ　方向の単位ベクトルである。

従って球座標　(r ,θ, φ) で表現するとヘルツベクトルの各成分は

$$\Pi r = (I.l)\ /\ (4\pi j\omega\varepsilon)\ /r.\ e\hat{}(-jk.r).\ \cos(\theta) \qquad (5\text{-}5a)$$

$$\Pi\theta = (I.l)\ /\ (4\pi j\omega\varepsilon)\ /r.\ e\hat{}(-jk.r).\ (-\ \sin(\theta)\ ) \qquad (5\text{-}5b)$$

$$\Pi\varphi = 0 \qquad (5\text{-}5c)$$

これより $H = j\omega\varepsilon.\nabla\times\ \Pi$

$$E = \nabla\nabla\Pi + k\hat{}2.\Pi$$

により電磁界を求めると

$$Hr = 0 \qquad (5\text{-}6a)$$

$$H\theta = 0 \qquad (5\text{-}6b)$$

$$H\varphi = (Il)/\ 4\pi.\ \sin(\theta)\ .(\ jk/r + 1/r\hat{}2)\ .\ e\hat{}(-jk.r) \qquad (5\text{-}6c)$$

$$Er = (I.l)\ /\ (2\pi j\omega\varepsilon)\ .\cos(\theta).\ (1/r\hat{}3 + jk/r\hat{}2)\ .e\hat{}(-jk.r) \qquad (5\text{-}7a)$$

$$E\theta = (I.l)\ /\ (2\pi j\omega\varepsilon)\ .\sin(\theta).\ /r\hat{}2\ .e\hat{}(-jk.r)$$

$$+\ j\omega\mu(I.l)\ /\ 4\pi.\ \sin(\theta)\ /r.\ e\hat{}(-jk.r) \qquad (5\text{-}7b)$$

(5-7c)

$$E\varphi = 0$$

遠方では1／r　の項以外は減衰して無視できるので

$$E\theta = j\omega\mu(I.l)\ /\ 4\pi.\ \sin(\theta)\ /r.\ e\hat{}(-jk.r)$$

$$= jk.(Il)/4\pi\sqrt{(\mu/\varepsilon)}.\ \sin(\theta)\ /r.\ e\hat{}(-jk.r) \qquad (5\text{-}8a)$$

$$H\varphi = jk.(Il)/\ 4\pi.\qquad \sin(\theta)\ /r.\ e\hat{}(-jk.r) \qquad (5\text{-}8b)$$

特に真空中では

$$\sqrt{(\mu/\varepsilon)} = 120\pi \qquad (5\text{-}9)$$

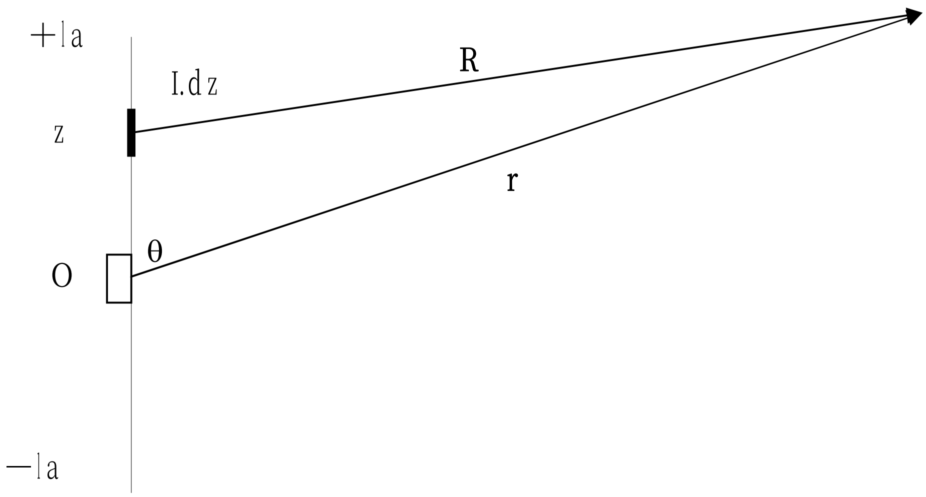
でありまた伝搬定数は　$k = 2\pi/\lambda$であるので

$$E\theta = j.60\pi(I.l)\ .\sin(\theta)\ /(\lambda r).\ e\hat{}(-jk.r) \qquad (5\text{-}10)$$

6.　半波長アンテナによる電磁界

アンテナの長さが波長に比べて無視できない大きさになると分布定数的に扱う必要が生じる。今下図のように真ん中で給電される長さ2．la　の線状アンテナを考える。
アンテナの端　z = la, -la においては電流は 0 でなくてはならない。
近似的に電流は次の正弦分布をしていると仮定する。

I (z) = Im..sin (k.(la - ｜z｜))　　(6-1)



今アンテナ上の点 z における電流要素 I.dz による遠方の電界 Eθ.dz は微小 Dipole アンテナの結果を用いて

Eθ.dz　=　j.60π(I.dz) .sin(θ) /(λR). e^(-jk.R)　　(6-2)

ここで　r　>> z においては近似的に　R = r – z.cos (θ)であるから

Eθ.dz　=　j.60π.sin(θ) /(λr). e^(-jk.r)　. I (z) .e^(jk.z.cos (θ).).dz　　(6-3)

これを z について-la から+la まで積分すると

Eθ.　= j.60π.sin(θ) /(λr). e^(-jk.r) [-la, la]∫I (z) .e^(jk.z.cos (θ).).dz　　(6-4a)

=　j.60.Im./r. e^(-jk.r)　.[cos (k.la.cos (θ)) – cos (k.la)]./ sin(θ)　　(6-4b)

特に

k.la =　π/2,　　2la =　λ/2　　(6-5)

の場合には電流分布は

I (z) = I..cos (k.z)　　(6-6)

となる。但し I は給電点の電流値である。この場合の電界は

Eθ.　=　j.60.I./r. e^(-jk.r)　.cos (π/2..cos (θ))./ sin(θ)　　(6-7)

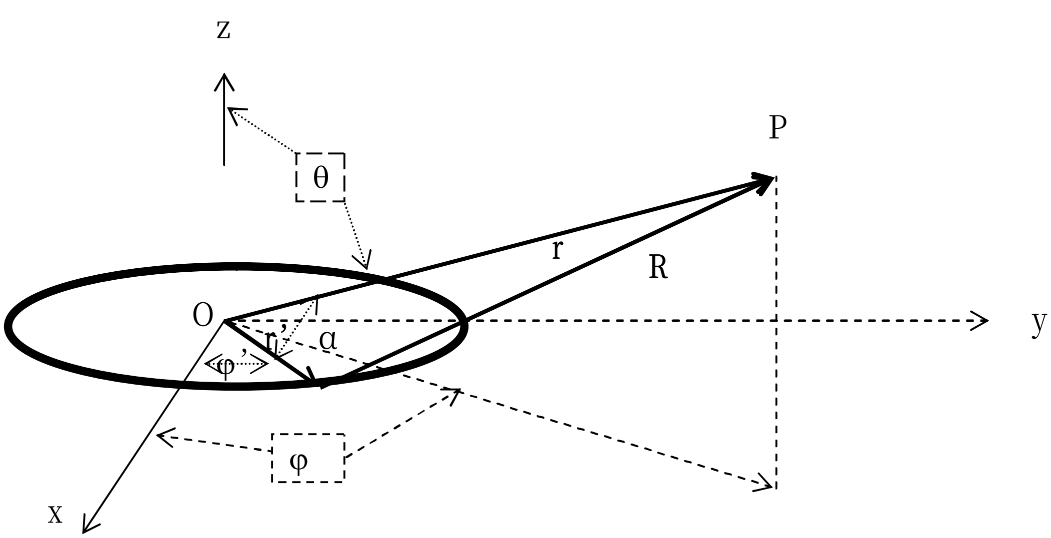
となる。

7. Loop Antenna による電磁界

下図のように半径 a なる円状導体に $I . e^{j\omega t}$ なる電流が流れている場合の電磁界を求めよう。
電流密度は

$$J = \langle\varphi'] . I / 2\pi a . \ \delta(\theta' - \pi/2) . \ \delta(r' - a) \qquad (7\text{-}1)$$

ただし<φ]はφ方向の単位ベクトルである。
..



上図において r と r'の成す角 α について

$$\cos(\alpha) = \sin(\theta) . \cos(\varphi - \varphi') \qquad (7\text{-}2)$$

であるから

$$R = r - a \sin(\theta) . \cos(\varphi - \varphi') \qquad (7\text{-}3)$$

ベクトルポテンシャル

$$A(r) = 1/(4\pi) . \int \mu . J((r') / R . e^{(-j.k.R)} dv'$$

$$= 1/(4\pi) . \int\int\int \mu . \langle\varphi'] . I / 2\pi a . \ \delta(\theta' - \pi/2) . \delta(r' - a) / R . e^{(-j.k.R)} . r'^{2} . \sin(\theta) . d\varphi' . d\theta . dr'$$

$$= \mu . I . a / 4\pi . 1/r . e^{(-jkr)} . [0, 2\pi] \int \langle\varphi'] . e^{(j.k.a. \sin(\theta) . \cos(\varphi - \varphi'))} . d\varphi' \qquad (7\text{-}4)$$

ここで座標の単位ベクトル関係を変換すると

$$\langle\varphi'] = \cos(\varphi - \varphi') . \langle\varphi] + \sin(\varphi - \varphi') . \sin(\theta) . \langle r] + \cos(\theta) . \sin(\varphi - \varphi') . \langle\theta] \qquad (7\text{-}5)$$

式 7-5 を 7-4 に代入して積分をおこなうと $\sin(\varphi - \varphi')$を因数とする項は奇関数であるから0となり、
結局

$$A(r) = \langle\varphi] . \mu . I . a / 4\pi . 1/r . e^{(-jkr)} . [0, 2\pi] \int \cos(\varphi - \varphi') . e^{(j.k.a. \sin(\theta) . \cos(\varphi - \varphi'))} . d\varphi'$$

$$= \langle\varphi] . j . \mu . I . a / 2 . J[1](ka \sin(\theta)) . 1/r . e^{(-jkr)} \qquad (7\text{-}6)$$

但し J[1](x)は一次のベッセル関数である。一般に n 次のベッセル関数については次式が成り立つ。

$$J[n](x) = 1/(2\pi j^{n}) . [0, 2\pi] \int \cos(n . \varphi) . e^{(j.k.z . \cos(\varphi))} . d\varphi \qquad (7\text{-}7)$$

微小ループアンテナ

k.a << 1 の場合には J[1](ka sin (θ))　(=)ka sin (θ)であるから

$A\varphi = j.\mu.I\ k..a^2/2 . \sin(\theta) .1/r.e^{(-jkr)}$　(7-8a)

$Ar = A\theta = 0$　(7-8b)

以上で求めたベクトルポテンシャルより以下の公式により電磁界を求めることができる。

$H = 1/\mu.\nabla \times A$　(3-8)

$E = -j\omega.\{A + 1/k^2.\nabla(\nabla A)\}$　(3-9)

結果は

$Hr = j.I\ k..a^2/2 . \cos(\theta) .1/r^2 .e^{(-jkr)}$　(7-9a)

$H\theta = -(ka)^2.I/4 . \sin(\theta) .1/r .e^{(-jkr)}$　(7-9b)

$H\varphi = 0$　(7-9c)

$Er = 0$　(7-10a)

$E\theta = 0$　(7-10b)

$E\varphi = \omega k.a^2.\mu.I/4 . \sin(\theta) .1/r .e^{(-jkr)}$　(7-10c)

遠方では Hr は無視でき、Hθと Eφが求める電界となる。

8.　アンテナの諸定数

ここではアンテナを無線通信の一部品としての立場から必要な諸特性を解説する。

8..1　アンテナの実効長(高)

z 方向の線状アンテナの遠方界は

$E\theta. = j.60\pi.\sin(\theta)/(\lambda r).\ e^{(-jk.r)}\ [-la, la]\int I(z) .e^{(jk.z.\cos(\theta).)}.dz$　(6-4a)

特にθ = π/2 方向に対しては

$E\theta. = j.60\pi/(\lambda r).\ e^{(-jk.r)}\ [-la, la]\int I(z).dz$　(8-1-1a)

$= j.60\pi/(\lambda r).\ e^{(-jk.r)}\ Io.le$　(8-1-1b)

ここで Io は z = 0 における給電電流であり、

$le = [-la, la]\int I(z).dz\ /\ Io$　(8-1-2)

をアンテナの実効高 (Effective　height) と呼ぶ。

地面に実効高 hなるアンテナを立てて地面に電流 Io を給電下場合の遠方電界は地面による反射により電界強度は 2 倍になり

$|E| = j.120\pi/(\lambda r).Io.h$　(V/m)　(8-1-3)

アンテナの可逆性により電界強度｜E｜なる電界に平行に実効長leなるアンテナを立てると開放電圧 Vo を生じる。

$Vo = |E|.le$　(V)　(8-1-4)

8.2　放射指向性(Directivity)

前節までの結果から一般に遠方電界は次の形式で表される。

$E = 1/r.e^{(-jkr)} .D(\theta, \varphi)$　(8-2-1a)

$$H = 1/Z_o <r] \times E \qquad (8\text{-}2\text{-}1b)$$

$Z_o = \sqrt{(\mu / \varepsilon)}$ は媒質の特性インピーダンスである。真空に対しては

$$Z_o = 376.7 \quad (\Omega) \qquad (8\text{-}2\text{-}2)$$

上の式よりある遠方の観測点の電磁界は距離に関しては共通の因子 $1/r.e^{(-jkr)}$によって決まり、更に観測点の発信源から見た方向に依存する性質はベクトル $D(\theta, \varphi)$ によって決まる。
すなわち $D(\theta, \varphi)$はアンテナの指向性(directivity)を表す。
指向性は Field pattern, $|D(\theta, \varphi)|$ もしくは Power pattern $|D(\theta, \varphi)|^2$ で表される。
例えば微小Dipoleアンテナや微小ループアンテナは半波長アンテナのField patternは $\sin(\theta)$によりφには依存しないので$\theta = 0, \pi$で 0, $\theta = \pi/2$ で最大値 1 となるドーナツ型のパターンとなる。

8.3　放射電力と放射抵抗 (Radiation power and Resistance)

アンテナから放射される電力密度は Poynting vector により

$$\mathbf{P} = E \times H^* = <r] \times |E|^2 / Z_o = <r].|D(\theta, \varphi)|^2 / Z_o / r^2 \qquad (8\text{-}3\text{-}1)$$

全放射電力 Wr はこれを半径 r の球面で面積分して得られる。

$$W_r = [\varphi = 0, 2\pi]\int[\theta = 0, \pi]\int |D(\theta, \varphi)|^2 / Z_o / r^2 .r^2.\sin(\theta).d\theta.d\varphi$$

$$= [\varphi = 0, 2\pi]\int[\theta = 0, \pi]\int |D(\theta, \varphi)|^2 / Z_o .\sin(\theta).d\theta.d\varphi \qquad (8\text{-}3\text{-}2)$$

$$= [立体角]\int |D(\theta, \varphi)|^2 / Z_o .d\Omega \qquad (8\text{-}3\text{-}3)$$

電流 Ioを加えて上の放射電力を放射するアンテナは給電端からみれば抵抗に等しい。これをアンテナの放射抵抗と言う。

$$R_r = W_r / |I_o|^2 \qquad (8\text{-}3\text{-}4)$$

例えば微小 dipole アンテナについては

$$E\theta = jk.(Il)/4\pi.\sqrt{(\mu / \varepsilon)}.\sin(\theta) / r.e^{(-jk.r)} \qquad (5\text{-}8a)$$

$$= j.60\pi(I.l).\sin(\theta)/(\lambda r).e^{(-jk.r)} \qquad (5\text{-}10)$$

なので $|D(\theta, \varphi)| = j.60\pi/\lambda(I.l).\sin(\theta) = jk.(Il)/4\pi.\sqrt{(\mu / \varepsilon)}.\sin(\theta)$ より

$$W_r = [\varphi = 0, 2\pi]\int[\theta = 0, \pi]\int |j.60\pi/\lambda.(I.l).\sin(\theta)|^2 / Z_o .\sin(\theta).d\theta.d\varphi$$

$$= |I|^2 .80.\pi^2.(l/\lambda)^2 = 1/6\pi.Z_o.(k.l.I)^2 \qquad (8\text{-}3\text{-}5)$$

および $R_r = 80.\pi^2.(l/\lambda)^2 = 1/6\pi.Z_o.(k.l.)^2$ 　(8-3-6)

8.4　アンテナの利得(Gain)

アンテナに電力 Wo を供給して空間に放射される全電力が Wr であるとアンテナ効率ηは

$$\eta = W_r / W_o \qquad (8\text{-}4\text{-}1)$$

である。
更に遠方電磁界において方向 (θ, φ) の電力密度は

$$\mathbf{P} = E \times H^* = <r].|E(r, \theta, \varphi)|^2 / Z_o = <r].|D(\theta, \varphi)|^2 / Z_o / r^2 \qquad (8\text{-}4\text{-}2)$$

今その方向 (θ, φ) のアンテナ利得 $G(\theta, \varphi)$ が次の式により定義される。

$$4\pi.r^2.|E(r, \theta, \varphi)|^2 / Z_o = G(\theta, \varphi).W_o \qquad (8\text{-}4\text{-}3)$$

即ち方向 (θ, φ) の電力密度が等方的に(isotropic)に全方向に放射されたと仮定したときの全放射電力と給電電力 Wo の比であり、従ってその方向の利得(gain)として定義される。
これより

$$G(\theta, \varphi) = 4\pi.|D(\theta, \varphi)|^2 / Z_o / W_o$$

$= Wr / Wo . 4\pi \ | D (\theta, \varphi) | \hat{}2 / Zo / Wr$
$= \eta . | D (\theta, \varphi) | \hat{}2 / Zo \ / \ (1/4\pi) \int | D (\theta, \varphi) | \hat{}2 / Zo . d\Omega$
$= \eta . | E (r, \theta, \varphi) | \hat{}2 \ / \ (1/4\pi) \int\int | E (r, \theta, \varphi) | \hat{}2 .\sin (\theta) .d\theta.d\varphi$ (8-4-4)

仮に遠方電界が方向によらない場合は $E (r, \theta, \varphi) = E (r) =$ <r].(1/r).e^(-jkr)であり
$G (\theta, \varphi) = \eta$ となる。更に無損失ならば $G (\theta, \varphi) = 1$ (odB)となる。これを基準アンテナとしてアンテナの利得をdBc　(comparison)と表記する場合がある。

微小Dipoleアンテナの利得は

$E\theta = j.60\pi (I.l) .\sin(\theta) /(\lambda r). e\hat{}(-jk.r)$ (5-10)
$G = | E (r, \theta, \varphi) | \hat{}2 / (1/4\pi) \int\int | E (r, \theta, \varphi) | \hat{}2 .\sin (\theta) .d\theta.d\varphi$
$= .\sin (\theta)\hat{}2 / (1/4\pi) \int\int\{.\sin (\theta)\}\hat{}3) .d\theta.d\varphi$
$= 3/2 \sin\hat{}2(\theta)$ (8-4-5)

8.5　入力インピーダンス

時間変化が $e\hat{}j\omega t$ の場合の電磁界方程式は

$\nabla x H = J + j\omega \varepsilon E = Jo + (j\omega \varepsilon + \sigma) E$ (8-5-1)
$\nabla x E = - j\omega \mu H$ (8-5-2)

但し Jo は電源により供給される電流源密度であり、σは媒質の伝導度(conductivity)密度である。
即ち電界 E により伝導電流σE が生じる。

複素Poynting　vecor　$P = E x H^*$　は上の式を適用して

$\nabla (E x H^*) = E.. Jo^* + \sigma .E\hat{}2 + j\omega (\mu H\hat{}2 - \varepsilon .E\hat{}2)$ (8-5-3)

あるいは

$E.. Jo^* = - \sigma .E\hat{}2 + j\omega.(\varepsilon .E\hat{}2 - \mu H\hat{}2) + \nabla (E x H^*)$ (8-5-4)

アンテナを含む大きな球を考えて体積分を行うと

$\int E.. Jo^* dv = - \int \sigma .E\hat{}2 \ dv + j\omega. \int (\varepsilon .E\hat{}2 - \mu H\hat{}2) dv + \int (E x H^*).ndS$ (8-5-5)

上の式の左辺は電源から入力される電力に対応し、右辺の第一項はアンテナもしくは媒質内で消費される電力　第二項は無効電力、第三項は遠方に放射される放射電力 Wr を表す。

ここで扱う電磁界は線形刑であり上の諸量は給電電流 Io に比例する。
以上を給電点からみればアンテナは入力インピーダンスを持つ回路素子に他ならない。

$Z = R + jX$ (8-5-6)

給電電流を Io,端子電圧を V とすると

$V = Z.Io$ (8-5-7)
$Wo = 1/2.Re(V.Io^*)$ (8-5-8)

ここで入力インピーダンスの実部は

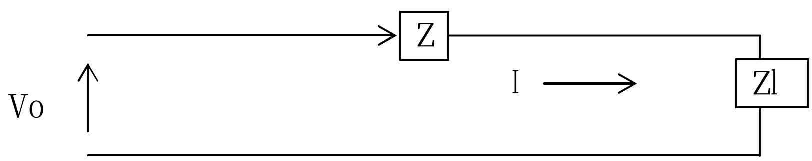
$R = Ri + Rr$ (8-5-9)

に分ける事ができる。Rr は放射抵抗であり、遠方に放射される電磁界に対応し、Ri はアンテナ内及び媒質内にて消費される電力に対応する。
またリアクタンスXは無効電力に対応する。

8-6　受信アンテナ

あるアンテナの給電点を開放にして電界のなかにおくと開放端に開放電圧 Vo が生じる。これに負荷 Zl をつなぐと電流 I が流れ電圧はVtに変わる。電流 I によって電磁界が再放射される。この時のアンテナのインピーダンスは前述の Z である。アンテナは開放電圧 Vo, 内部インピーダンス Z の電源に等価な動作をしておりこの時流れる電流は

$$I = Vo / (Z + Zl) \qquad (8\text{-}6\text{-}1)$$

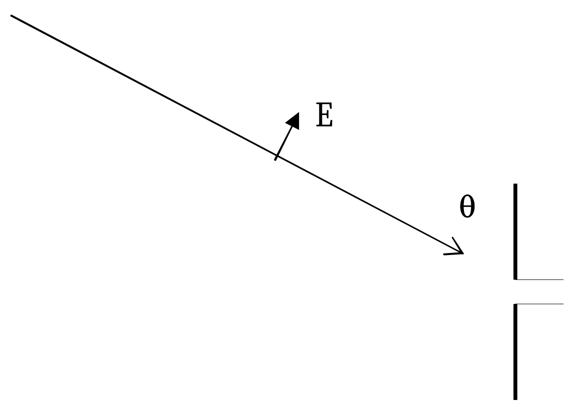


最大有効電力 Wa
負荷に取り出す電力は　Zl. ｜I｜^2 = Zl.｜Vo / (Z + Zl)｜^2= ｜Vo｜^2. Zl /｜(Z + Zl)｜^2
有効電力はこの実部である。 アンテナの内部抵抗を　Z = R + j.X　とおくと有効電力を最大にするのは負荷 Zl　が Z に整合して　Zl = Z*となる場合である。この時最大電力は

$$Wa = |Vo|^2 / (4R) \qquad (8\text{-}6\text{-}2)$$

となる。

下図のように到来電波を微小 dipole アンテナで受信する場合を考える。



上図の微小 dipole アンテナで開放電圧は

$$Vo = E.l \sin(\theta) \qquad (8\text{-}6\text{-}3)$$

微小 dipole アンテナの放射抵抗は

$$Rr = 1/6\pi . Zo. (k.l.)^2 \qquad (8\text{-}3\text{-}6)$$

であるから最大有効電力は

$$Wa = Vo^2 / 4Rr = 3\lambda^2/8\pi / Zo.E^2. \sin^2(\theta) \qquad (8\text{-}6\text{-}4)$$

他方微小 dipole アンテナのアンテナ利得は

$$Ga = 3/2 \sin^2(\theta) \qquad (8\text{-}4\text{-}5)$$

であるから

$$Wa = \lambda^2 / (4\pi.Zo).Ga.E^2 = \lambda^2 / (4\pi). \sqrt{(\varepsilon / \mu)}.Ga.E^2 \qquad (8\text{-}6\text{-}5)$$

受信アンテナによる再放射
前述の式により

$$Vo = (Z + Zl).I \qquad (8\text{-}6\text{-}6)$$

電力は

$$Vo.I^* = Z.I.I^* + Zl.I.I^* \qquad (8\text{-}6\text{-}7)$$

第二項は負荷 Zl に出力される電力であるが、第一項はアンテナから再放射される電力である。整合条件においては　Zi = Z*であり最大有効電力に等しい電力が再放射される。

8.7　アンテナの可逆性と一般性

上の式の導出においては受信アンテナの特性を導くのに送信アンテナで求めた放射抵抗、アンテナインピーダンス、およびアンテナ利得を用いた。実際同じアンテナを送信に使う場合も受信に使う場合も指向性、利得、インピーダンス等の特性は厳密に等しい事が証明されている。これをアンテナの可逆性、Reciprocity と呼ぶ。
アンテナの可逆性はアンテナの動作が線形、受動、双方向的であることから直感的に理解される。
空間の点 A から点 B への伝搬損失が Lab とするとその逆の方向の伝搬損失 Lba = Lab である。また電流源と遠方電磁界の関係は共通のＧｒｅｅｎ関数 1/r.e^(-jkr)の荷重積分で与えられるが、Green 関数は k' = - k と置くと伝搬方向が逆になる他は全く同じ形式の式となり共通の物理的特性を有する。

上の式の導出では微小 diipole アンテナの公式を用いたが、指向性、利得、インピーダンスの概念はすべてのアンテナについて共通であり、アンテナの諸特性は他の種類のアンテナについてもそのまま成り立つ。

8.8　実効面積 (effective aperture)

前節で求めた受信アンテナの最大有効電力 Wa の公式

$$Wa = \lambda^2 / (4\pi.Zo).Ga.E^2$$
$$= \lambda^2 / (4\pi). Ga.E^2/Zo \qquad (8\text{-}6\text{-}5)$$

ここで E^2/Zo は伝搬電磁界の電力面密度(W/m^2)である。
従って受信アンテナの動作を電力を集める面とみなすとその有効面積 Ae は

$$Ae = \lambda^2 / (4\pi). Ga \qquad (8\text{-}8\text{-}1)$$

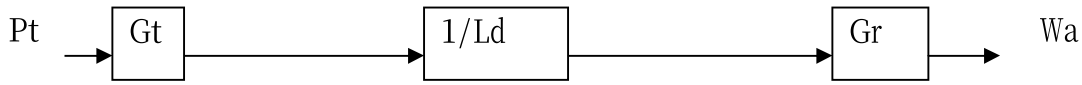
8.9　無線伝送路設計

無線伝送系は送信部、伝搬路、受信部で構成される。

送信 EIRP (Equivalent isotropic radiation power)

送信電力 Pt (W)　の信号は送信アンテナで Gt 倍される。即ち受信部の方向に指向性を高めることは送信アンテナによる信号増幅に等しい。

$$EIRP = Gt.Pt \qquad (8.\text{-}9\text{-}1)$$



伝搬損失 Propagation loss)
送信部と受信部の距離を d (m) とすると送信電力密度は

$$P = EIRP /(4\pi .d\hat{}2) = Pt .Gt / (4\pi .d\hat{}2) \qquad (8\text{-}9\text{-}2)$$

受信部の最大有効電力は

$$Wa = P .Ae = Pt .Gt . \{\lambda / (4\pi .d)\}\hat{}2 .Gr \qquad (8\text{-}9\text{-}3)$$

これより

$$Wa = Pt .Gt /Ld .Gr \qquad (8\text{-}9\text{-}4)$$

伝搬損失 Ld は

$$Ld = \{\lambda / (4\pi .d)\}\hat{}2 = 1 / \{4\pi .d/\lambda\}\hat{}2 \qquad (8\text{-}9\text{-}5)$$

アンテナ雑音
アンテナが拾って出力する雑音には温度雑音、宇宙雑音(宇宙背景放射), 太陽雑音、大気雑音、、人工雑音などの種類があるが、熱雑音に換算すると雑音温度(Noise temperature)として把握される。

<u>Nyquist の定理</u>
絶対温度Tなる抵抗Rの内部熱擾乱雑音の総和として R の両端に生ずる 2 乗平均電圧<Vn^2>は

$$<Vn\hat{}2> = 4R.k.T.B \qquad (8\text{-}9\text{-}6)$$

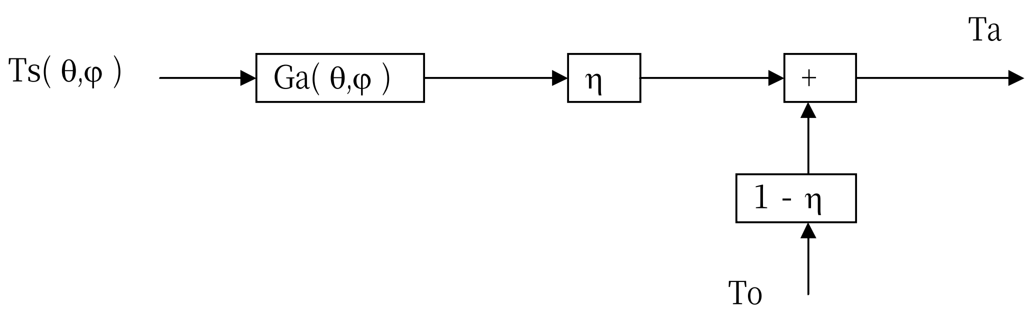
但しkはボルツマン定数、B は観測している帯域幅である。無線通信に使う電波の範囲では熱雑音の電力周波数スペクトルは周波数帯によらず一定である。
上の熱雑音は抵抗Rに等しい負荷によって最大の大きさが取り出される。その雑音電力 Wn は

$$Wn = k.T.B \qquad (8\text{-}9\text{-}7)$$

特に帯域幅 B = 1 Hz に相当する雑音電力密度を No と表記することが多い。

$$No = k .T\ (W/Hz) = -228.6 + 10.Log\ (T)\quad (dBW/K) \qquad (8\text{-}9\text{-}8)$$

物体から発生する有効雑音電力は対象物の温度のみによるので雑音を雑音温度で評価すると便利である。受信アンテナシステムの雑音温度は下のモデルから計算される。



但し Ts(θ,φ)は(θ,φ)方向の空間の温度, η.Ga(θ,φ)は絶対アンテナ利得、ηはアンテナ効率、To はアンテナの物体温度である。アンテナ雑音温度 Ta は

$$Ta = (1 - \eta) .To + \eta. \int Ga(\theta,\varphi) . Ts(\theta,\varphi) .d\Omega /4\pi \quad (8\text{-}9\text{-}9).$$

回線設計

上の結果を組み合わせて次の回線設計を行う。

アンテナ出力における信号電力Cは最大有効電力 Wa であるから

$$C = Pt .Gt /Ld .Gr \quad (8\text{-}9\text{-}10)$$

受信アンテナ雑音温度 Ta が決まると雑音電力密度 No がきまるから

$$C/No = Pt .Gt /Ld .Gr / (k.Ta) \quad (8\text{-}9\text{-}11)$$

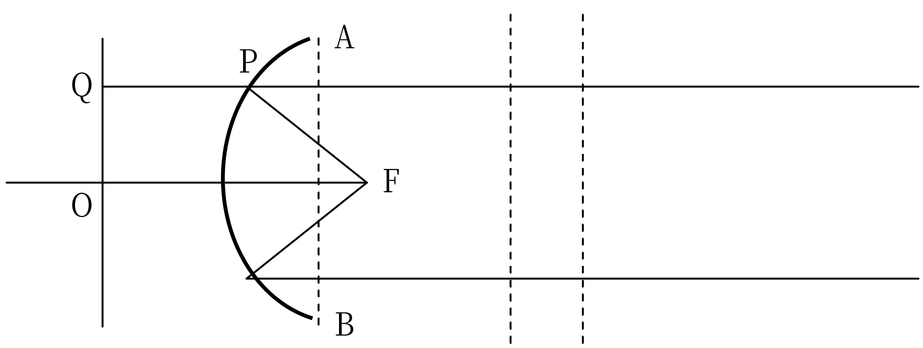
もし信号の帯域幅が B (Hz)　であれば<u>アンテナ出力における C/N 比</u>は

$$C/N = Pt .Gt /Ld .Gr / (k.Ta.B) \quad (8\text{-}9\text{-}12)$$

9.　Parabola アンテナ

パラボラアンテナはマイクロ波帯の中継システムや衛星通信に広く用いられている。

下図において基準直線 OQ と一点 F から等距離にある点P　(PQ = PF)は放物線(parabo;a)を成す。



この一点Fを焦点(Focal　point)　呼ぶ。

放物線には上図のごとく焦点Fから発した電磁波が放物面で反射すると伝搬ベクトル **k** が等しくなり、平面波となる特徴がある。受信の場合も同様に放物面での反射により平面波を同位相で焦点Fに集める。

パラボラアンテナの焦点から電力 Wf の電磁波を鏡面に向けて放射し、鏡面の反射波が開口面 AB に作る電界を **E**i とするとアンテナ正面の遠方界は第 4 節の結果から

$$\mathbf{E}\,(r) = j / (\lambda r).\ e\text{^}(-jk.r).\ [開口面] \int \mathbf{E}i\ dS \quad (4\text{-}21)$$

今開口面ABが直系Dの円である場合にはアンテナ利得は

$$Ga = (|\mathbf{E}\,(r)|\text{^}2/Zo) / (Wf / (4\pi .r\text{^}2)) = (\pi D / \lambda)\text{^}2 .g \quad (9\text{-}1)$$

である事が得られている　(Ref[1],虫明,p.96-99)。

$(\pi D)^2$は開口面の面積であり、それにかかる因子gは開口面効率である。開口面効率は焦点Fから放物面に電磁波を放射する一次アンテナの利得、及び放物面の大きさと反射効率特性などに関連して決まる。通常 g = 1/2-2/3 である。

10.　給電線と整合回路

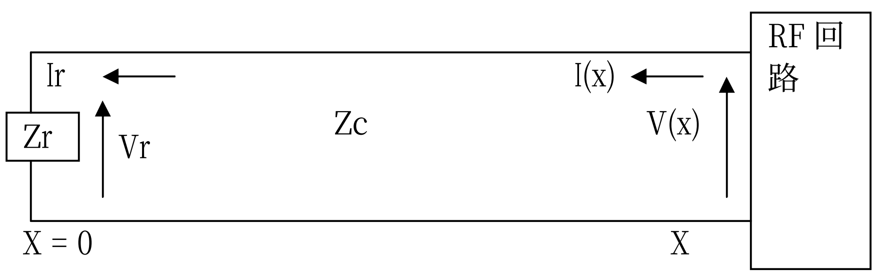
アンテナとRF機器を結ぶのが給電回路（Feeder circuit）である。

給電(feeder)線の種類

a.　平衡型（平行二線形）　；半波長アンテナなどに使用
b.　不平衡型　；同軸線路
c.　方形導波管　；パラボラアンテナなどに使用。

給電特性

上の図のように特性インピーダンス Zc、伝搬定数γの線路でアンテナ(インピーダンス Zr)と RF 回路が接続されている。



この時

$$V(x) = Vr.\cosh(\gamma .x) + Ir.Zc.\sinh(\gamma .x) \qquad (10\text{-}1a)$$

$$I(x) = Vr/Zc.\sinh(\gamma .x) + Ir.\cosh(\gamma .x) \qquad (10\text{-}1b)$$

伝搬定数　$\gamma = \alpha + j\beta$　(10-2)

αは減衰定数、βは位相定数である。

上の式を変形して

$$V(x) = Vr/2 .(1+ Zc/Zr) .e\hat{}(\gamma .x) .(1+ \Gamma .e\hat{}(-2\gamma .x)) \qquad (10\text{-}3a)$$

$$I(x) = Ir/2 .(1+ Zr/Zc) .e\hat{}(\gamma .x) .(1- \Gamma .e\hat{}(-2\gamma .x)) \qquad (10\text{-}3b)$$

反射係数(Reflection coefficient)　Γ

$$\Gamma = (Zr - Zc) / (Zr + Zc) \qquad (10\text{-}4)$$

定在波比（Standing Wave Ratio　SWR）

V（x）は(1+ Γ.e^(-2γ.x))によって振幅が変化する。その最大最小値の比を SWR と呼び S で表す。

$$S = .(1+|\Gamma|) / (1-|\Gamma|) \qquad (10\text{-}5)$$

インピーダンス

$$Z(x) = V(x) / I(x) = Zc. (1+ \Gamma.e\hat{}(-2\gamma.x)) / (1- \Gamma.e\hat{}(-2\gamma.x)) \qquad (10\text{-}6)$$

反射損

RF 回路の内部インピーダンスは Zc に設計されているものとする。RF回路からアンテナに供給される電力 Win は RF 回路の開放電圧を Vo とすると

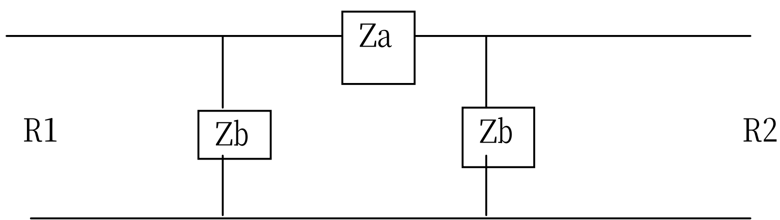
$$Win = |Vo / (Zc + Z(x)|\hat{}2 .Z(x)$$

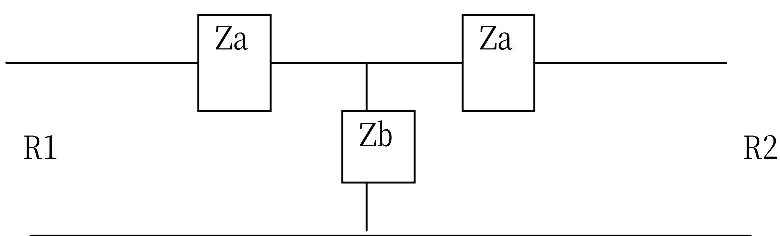
$$= |Vo|\hat{}2 /4Zc . (1 - |\Gamma|\hat{}2 .e\hat{}(-2\alpha x)) \qquad (10\text{-}7)$$

即ちインピーダンスが整合していないとアンテナのところで反射が生じて給電効率が低下する。

整合回路 (Matching circuit)

集中定数素子による整合回路



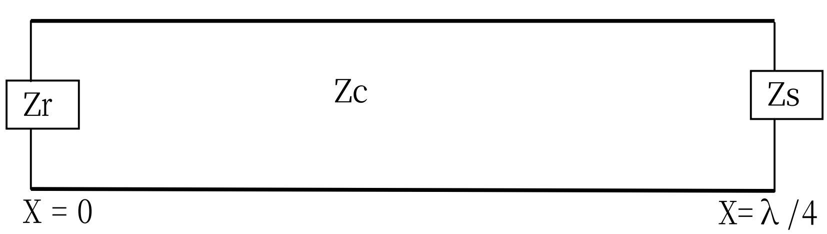


上の回路でリアクタンス素子 Za, Zb を次式を満足するように設定することによりインピーダンス R1, R2 を整合させることができる。

$$Za = - Zb = [+, -]\, j\sqrt{R1.R2}) \qquad (10\text{-}8)$$

分布定数素子による整合

インピーダンス Zs と Zr を整合させるために伝搬定数 jβ で特性インひーダンス Zc なる分布定数線路で両者を接続する。このとき線路の長さをλ/4 に設定する。



上の図において線路長は短いので減衰は無視でき、伝搬定数　γ = jβとなり

V(x) = Vr.cos(βx)　　+ Ir.Zc.sin(βx)　　(10-9a)

I(x) = Vr/Zc.sin (βx)　+ Ir.cos(βx)　　(10-9b)

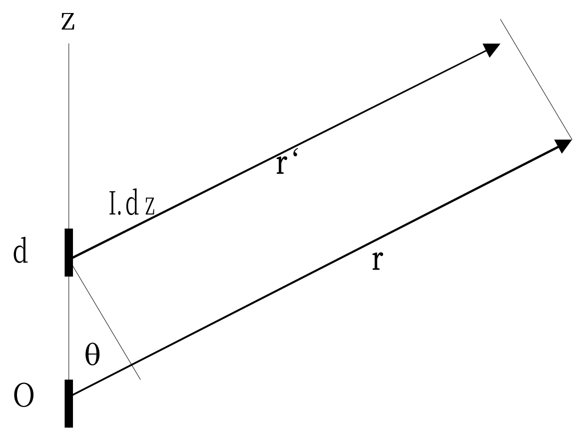
ここで x =λ/4 にすると　β.x = 2π/λ.λ/4 =　π/2 なので

Zs = Zc^2 / Zr　　(10-10)

となるので与えられたZr, Zcに対して特性インピーダンスZc　=　√(Zr.Zs)なるλ/4 長の線路により整合させせることができる。

11. アンテナ配列　(antenna arrays)

半波長アンテナの利得は約 2.15(dB)である。またパラボラアンテナの利得は(πD / λ)^2 であるのでアンテナの直径を大きくすれば増加するが、自ずと限界がある。
そこでアンテナの利得を大きくするには複数のアンテナを組み合わせて Antenna Array を構成して実現することができる。



上の図のように微小 dipole アンテナを z 方向に二個並べた合成電界を求める。

Eθ　=　jωμ(I.l) / 4π. sin(θ) /r. e^(-jk.r)
　= jk.(Il)/4π √(μ / ε). sin(θ) /r. e^(-jk.r)
　= K(θ)/r. e^(-jk.r)　　(5-8a)

Hφ　= jk.(Il)/ 4π.　　sin(θ) /r. e^(-jk.r)　　(5-8b)

遠方における行路差は

r' = r – d.cos(θ)　　(11-1)

合成電界は

<Et] = <θ] K(θ)/r. e^(-jk.r) + <θ] K(θ)/r'. e^(-jk.r')
　= <θ] K(θ/r. e^(-jk.r) .{ 1+ e^(jkd.cos(θ))　　(11-2)

上の場合を n 個に拡張すると

<Et] = <θ] K(θ/r. e^(-jk.r) .{ 1+ e^(jkd.cos(θ)) + e^(2jkd.cos(θ)) + ,,, + e^((n-1)jkd.cos(θ))
= <θ] K(θ/r. e^(-jk.r) { 1 - e^(n.jkd.cos(θ)) } / { 1 - e^(jkd.cos(θ)) }
= <θ] K(θ/r. e^(-jk.r) . M[n](θ)　　(11-3)

M[n](θ)は配列の指向性係数であり、

M[n](θ) = e^{ (n-1)/2.jkd.cos(θ))} .sin{ (n/2.kd.cos(θ)) } / sin{(1/2kd.cos(θ)) }　　(11-4)

特にθ ＝ π/2 方向には

M[n](θ) = n　　(11-5)

となる。

電界が n 倍になるので放射電力は n^2 倍になるが、供給電力も n 倍必要なので利得は n 倍となる。

積の法則

同じ特性のアンテナを適当に配置して得られるアンテナ配列の総合特性は元のアンテナの特性と配列の指向性係数の積となる。

--

問題

問題 1-1, Maxwell の方程式を積分形式で表現し、物理的な意味を説明せよ。

問題 2-1 式 2-2)を導け

問題 3-1 平面波について次のことを示せ。

(1) 等位相面は伝搬ベクトル k に直交する平面である。
(2) 電磁界 H , E は伝搬ベクトル k に直交する。
(3) H と E は直交する。
(4) 媒質の固有インピーダンスは Zo = ｜E｜/｜H / ＝ √(μ/ε)

問題 4-1 三次元の Helmholtz Green 関数が G(R) = - 1/(4πR) .e^(-j.k.R) で与えられることを示せ。

(1) R =/= 0 において　[1/R^2 .d*/dR (R^2 .d*/dR) + k^2] G(R) = 0
(2) R = 0 の近傍において
∫∫∫∇∇(1/R) dv = - 4π

問題 4-2 開口面アンテナの垂直方向の遠方電界が式 4-21 で与えられることを示せ。
また磁界も求めよ。

問題 5-1 球座標で表現された微小Dipoleのヘルツベクトル

Π(r) ＝ (I.l) / (4πjωε) /r. e^(-jk.r). (cos(θ), - sin(θ), 0)　　(5-5)

から公式 H = jωε.∇x Π 、 E = ∇∇Π + k^2.Π　により電磁界を求めよ。

問題 6-1 中点で給電される長さ 2la の線状アンテナについて式 6-4 を求めよ。

問題 6-2 上の結果を下の場合について求めよ。

微小アンテナ　2la << λ
半波長アンテナ　2la = λ/2
全波長アンテナ　2la = λ

問題　7-1　式 7-2,及び 7-3 を証明せよ。
問題　7-2　式 7-5 を証明せよ。
問題　7-3　式 7-8 のベクトルポテンシャルから電磁界を求めよ。

問題　8-1　微小ループアンテナについて全放射電力および放射抵抗を求めよ。
問題　8-2 半波長アンテナについて全放射電力および放射抵抗を求めよ。
問題　8-3　微小dipoleアンテナの利得を求めよ。
問題　8-3　メガホンを拡声器として使う場合と集音器として使う場合の比較からアンテナの可逆性の物理的内容を述べよ。

問題　9-1　パラボラアンテナの開口面に垂直に入射する平面波が焦点に集まることを証明せよ。
問題　9-2　パラボラアンテナの焦点と開口面の間の行路長はすべての経路に付き一定であることを示せ。

問題　10-1　集中定数の整合回路について式(10-8)を求めよ。
問題　10-2　分布定数整合回路についてλ/4 線路が理想変成器として動作することを示せ。

問題　11-1　同じアンテナを n 個一直線上に間隔 d で並べたアンテナ配列において i 番目のアンテナに i.δなる位相差を加えて給電した場合のアンテナ配列の指向性係数 M[n](θ)を求めよ。
問題　11-2 M[n](θ)が最大となる方向が配列の直線に対して直角方向(θ =/2)になる条件を求めよ。
このようなアンテナ配列を Broadside array と呼ぶ。
問題 11-3 M[n](θ)が最大となる方向が配列の直線方向(θ = 0)になる条件を求めよ。
このようなアンテナ配列を Endfire array と呼ぶ。

参考文献

[1] 虫明康人、<u>アンテナ、電波伝搬</u>　電子通信学会編、コロナ社　昭和 53 年
[2] Curtis C. Johnson, <u>FIELD AND WAVE ELECTRODYNAMICS</u> , The McGrow Hill Book Company
[3] 内田英成、虫明け康人、 <u>超短波空中戦</u> 、コロナ社
[4] Julius Adams Stratton, <u>ELECTROMAGNETIC THEORY</u> , The McGrow Hill Book Company , 1941