

非線形増幅器のモデル解析

2007/7/26 市吉 修

1. 増幅器のモデル

振幅利得 g の線形増幅器は入力 $x(t)$ に対して出力 $y(t)$ は $y = g \cdot x$ を出力する。ある標準入力 x_0 に対する出力は $y_0 = g \cdot x_0$ となる。そこで $y' = y/y_0$, $x' = x/x_0$ とすると $y' = x'$ となる。即ち線形増幅器は利得 1 の標準形に変換できる。そこで以後は y', x' を y, x と表記して標準化解析を行う。

非線形のために出力 $y(t)$ は歪むが、それを以下のモデルで近似する。

$$y = (1 - \alpha \cdot x^2) \cdot x(t - \tau(x^2))$$

即ち入力信号 x の振幅に応じて振幅が飽和し時間遅延が生じる。上の式を Taylor 展開すると

$$y = (1 - \alpha \cdot x^2) \cdot \{ x(t) - \tau(x^2) \cdot dx/dt \}$$

いま扱う信号は角周波数 ωc なる高周波だとする。

$$x(t) = a(t) \cdot \cos(\omega c \cdot t + \theta) = \text{Re} \{ a \cdot e^{j(\omega c \cdot t + \theta)} \} = \text{Re} X \quad (X = a \cdot e^{j(\omega c \cdot t + \theta)})$$

出力は同様に $y(t) = \text{Re} Y$ とすると うえの式は

$$Y = (1 - \alpha \cdot x^2) \cdot (1 - j\omega c \cdot \tau(x^2)) X \quad (j \text{ は虚数単位; } j^2 = -1)$$

となる。そこで $\omega c \cdot \tau(x^2) = \beta \cdot x^2$ と仮定すると

$$Y = (1 - \alpha \cdot x^2) \cdot (1 - j\beta \cdot x^2) X$$

となる。

このモデルでは $x^2=1/\alpha$ の時出力が 0 となる点が実際と合わない。そこで

$$Y = \{ 1 - (\alpha + j\beta) \cdot x^2 \} \cdot X$$

が最も実際に合うモデルと考えられるので、以下このモデルの動作解析を行う。

2. 非線形増幅特性と混変調雑音

上のモデルを更に下のように変形する。

$$Y = \{ 1 - (\alpha + j\beta) \cdot x^2 \} \cdot X = \{ 1 - (\alpha + j\beta) \cdot \langle x^2 \rangle \} \cdot X - (\alpha + j\beta) \cdot (x^2 - \langle x^2 \rangle) \cdot X$$

ただし $\langle x^2 \rangle$ は x^2 の時間平均であり入力電力 P_i に他ならない。即ち

$$Y = \{ 1 - (\alpha + j\beta) \cdot P_i \} \cdot X - (\alpha + j\beta) \cdot (x^2 - \langle x^2 \rangle - 1) \cdot P_i \cdot X$$

第一項は出力希望波を表し、第二項は混変調雑音(inter-modulation noise)を表す。

3. 利得飽和特性 (Saturation performances of amplifier gain)

上式の第一項の利得 $G = Y/X = \{ 1 - (\alpha + j\beta) \cdot P_i \} = 1/G \cdot e^{j\varphi}$

$$1/G = \sqrt{\{ (1 - \alpha \cdot P_i)^2 + (\beta \cdot P_i)^2 \}}$$

$$\varphi = \arctan \{ \beta \cdot P_i / (1 - \alpha \cdot P_i) \}$$

となる。 P_i が小さい時は $1/G = 1, \varphi = 0$ であり線形増幅を行う。 P_i が大きくなるにつれて振幅利得は減少し AM / PM (振幅位相変動) が生ずる。

電力利得 $|G|^2$ は $|G|^2 = (1 - \alpha \cdot P_i)^2 + (\beta \cdot P_i)^2$

電力利得 $|G|^2$ は $P_i = \alpha / (\alpha^2 + \beta^2)$ にて極小となり極小値は $|G|^2 = \beta^2 / (\alpha^2 + \beta^2)$

位相変移 ϕ は P_i が小さい範囲では P_i に比例するが P_i が大きくなるにつれて非線形が顕著になり $P_i = 1/\alpha$ において $\pi/2$ (radian) に達する。

4. 振幅飽和特性 (Signal saturation performances)

$$x(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_c t + \theta) = \operatorname{Re} \{a \cdot e^{j(\omega_c t + \theta)}\} = \operatorname{Re} X \quad (X = a \cdot e^{j(\omega_c t + \theta)})$$

$$\text{において } P_i = \langle x^2 \rangle = a^2/2 = |X|^2/2 \quad |X|^2 = 2P_i$$

出力電力

$$2P_o = |Y|^2 = \{1 - (\alpha + j\beta) \cdot P_i\} \cdot |X|^2 = \{(1 - \alpha \cdot P_i)^2 + (\beta \cdot P_i)^2\} \cdot 2P_i$$

$$P_o = \{(1 - \alpha \cdot P_i)^2 + (\beta \cdot P_i)^2\} \cdot P_i$$

$dP_o/dP_i = 0$ とおくと二つの極値が $P_i = 1/(2\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3\beta^2})$, $1/(2\alpha - \sqrt{\alpha^2 - 3\beta^2})$ に生ずる。 $\alpha^2 = 3\beta^2$ の場合には両者は一致し、増幅器は飽和点がない。 $\alpha^2 > 3\beta^2$ の範囲では増幅器は飽和特性を示す。即ち最大出力を超えて入力電力を増加すると出力電力が却って減少する範囲がある。

飽和点 (出力最大)

$P_i = 1/(2\alpha + \sqrt{\alpha^2 - 3\beta^2})$ に於いて

$$G_p = P_o/P_i = 2/9 \cdot \{(\alpha^2 + \beta^2) \cdot \{\alpha^2 + 3\beta^2 + \alpha \sqrt{(\alpha^2 - 3\beta^2)}\}\}$$

$$\phi = \arctan\{\beta / (\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 3\beta^2)})\}$$

飽和点の特性は各種の増幅器について

$\beta = 0$	; $G_p = 4/9 = -3.5 \text{ (dB)}$	$\phi = 0$
$\beta = \alpha/2$	; $G_p = 2/5 = -4.0 \text{ (dB)}$	$\phi = 18 \text{ (deg)}$
$\beta = \alpha/\sqrt{3}$	; $G_p = 1/3 = -4.8 \text{ (dB)}$	$\phi = 30 \text{ (deg)}$

5. 混変調特性 (Intermodulation noise performances)

第二節で求めた式 $Y = \{1 - (\alpha + j\beta) \cdot P_i\} \cdot X - (\alpha + j\beta) \cdot (x^2 / \langle x^2 \rangle - 1) \cdot P_i \cdot X$

信号電力は前節で求めた;

$$P_s = \{(1 - \alpha \cdot P_i)^2 + (\beta \cdot P_i)^2\} \cdot P_i$$

雑音電力は

$$P_n = \langle \{(\alpha + j\beta) \cdot (x^2 / \langle x^2 \rangle - 1) \cdot P_i \cdot X\}^2 \rangle = (\alpha^2 + \beta^2) C^2 \cdot P_i^3$$

ただし

$$C^2 = \langle (x^2 / \langle x^2 \rangle - 1)^2 \rangle$$

である。

信号が振幅変動が無い場合、即ち無変調やMSK変調波に対しては $C = 0$ となり混変調雑音は生じない。振幅が正弦波の場合は $C^2 = 1/2$ となる。

出力NPR(Noise Power Ratio)は

$$NPR = P_n / P_s = (\alpha^2 + \beta^2) C^2 / \{(1 - \alpha \cdot P_i)^2 + (\beta \cdot P_i)^2\} \cdot P_i^2$$

小振幅時にはNPRは入力電力の二乗に比例する。

飽和点 $P_i = 1/(2\alpha + \sqrt{(\alpha^2 - 3\beta^2)})$ に於いて

$$NPR = C^2(\alpha^2 + 3\beta^2) / \{(\alpha - \sqrt{(\alpha^2 - 3\beta^2)})^2 + \beta^2\}$$

振幅特性が飽和する範囲で非線形が最もはなはだしい場合には $\alpha^2 - 3\beta^2 = 0$ となり

$$NPR = C^2$$

6. 非線形増幅器のスペクトル特性

今入力信号が帯域幅 $W(\text{Hz})$ に渡って一定と仮定する。これは広帯域変調の単一波もしくは非常に多数の等しい電力の変調波が増幅器に入力される場合に相当する。

第二節より増幅器の出力は

$$Y = \{1 - (\alpha + j\beta) \cdot P_i\} \cdot X - (\alpha + j\beta) \cdot (x^2 / \langle x^2 \rangle - 1) \cdot P_i \cdot X$$

第二項の混変調は

$$Z = (\alpha + j\beta) \cdot (a^2 / \langle a^2 \rangle - 1) \cdot P_i \cdot a \cdot e^{j(\omega_c t + \theta)}$$

その振幅部分は $(a^2 / \langle a^2 \rangle - 1) \cdot a$ であり周波数スペクトルは $a(t)^3$ のスペクトルを求める必要がある。因子 $(a^2 / \langle a^2 \rangle - 1)$ は混変調出力に信号 $a(t)$ 成分が含まれないことを示す。

今 $a(t)$ のフーリエ変換 $A(\omega)$ が帯域幅 $W(\text{Hz})$ の平坦スペクトルをもつものとする。

$$A(\omega) = \begin{cases} 1 & (-W/2 < \omega < W/2) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

このとき $a(t)^3$ のスペクトルは

$$Z(\omega) = \begin{cases} 0 & (\omega < -3W/2) \\ 1/2 \cdot (\omega + 3W/2)^2 & (-3W/2 < \omega < -W/2) \\ -\omega^2 + 3W^2/4 & (-W/2 < \omega < W/2) \\ 1/2 \cdot (\omega - 3W/2)^2 & (W/2 < \omega < 3W/2) \\ 0 & (\omega > 3W/2) \end{cases}$$

即ち周波数帯域は3倍に広がる。

雑音の電力スペクトル $Z(\omega) / \omega^2$ を積分すると

$$\int_{-3W/2}^{3W/2} Z(\omega) / \omega^2 d\omega = 11/20 \cdot W^5$$

これが雑音電力 P_n に相当する。

帯域の真ん中では $\omega = 0$ とおいて

$$P_z(\omega) = Z(\omega) / \omega^2 \cdot P_n / (11/20 \cdot W^5) = 45/44 \cdot P_n / W \quad (\text{watt} / \text{Hz})$$

他方信号の電力スペクトル密度は

$$P_s(\omega) = P_s / W \quad \text{であるから}$$

帯域の真ん中あたりのNPRの密度比 n_{pr} は

$$n_{pr} = P_z(\omega) / P_s(\omega) = 45/44 \cdot P_n / P_s = 45/44 [NPR]$$

帯域の端においては n_{pr} は真ん中より $(3/2)^2 = 3.5 (\text{dB})$ だけ改善する。