一般社団法人 電子情報通信学会
THE INSTITUTE OF ELECTRONICS,
INFORMATION AND COMMUNICATION ENGINEERS

信学技報
IEICE Technical Report

ベクトル・スカラー環代数論

―　―

市吉　修

二十一世紀を楽しく生きよう会
‡神奈川県相模原市緑区上九沢 230-7
E-mail:　osamu-ichiyoshi@muf.biglobe.ne.jp

あらまし

宇宙ロケットや衛星等の飛行体の制御には飛行体に固定した機体座標系と宇宙に固定した慣性座標系との持続的な変換が必要不可欠である。座標変換は空間の任意のベクトルを測定系より与えられる回転軸ベクトルの周りに与えられた角だけ回転を行う事により実行される。その優美な方法として四元数を用いる方法がある。四元数は虚数を三次元に拡張したものと見なせるが、見方を代えると虚数部を三次元ベクトルに置き換える事ができる。四元数の実部をスカラー部に､虚部を三次元ベクトル部に置き換えると四元数と等価なベクトル･スカラー系が得られる。ここで四元数の虚数の乗算はベクトル・スカラー環乗算(x)で置き換えられる。それは任意の三次元ベクトル **u,v** に対して **u** (x) **v** = **u** x **v** – (**u.v**)として定義される。但し **u** x **v** は通常のベクトル積あるいは外積、(**u.v**)はスカラー積あるいは内積である。このようにしてベクトル・スカラー系を定義するとそれは本質的には四元数代数系に等価であり、代数的には環を成す。

ベクトル・スカラー積は単位大きさの任意のベクトル a に対して a (x) a = -1 となるので虚数に類似の性質を持っている。これより角 θ に対して cos(θ) + **a**.sin(θ) = e^(**a.** θ)としてベクトル・スカラーの指数関数を定義し、極座標表示を行う事ができる。更にはベクトル・スカラー環における任意のべき乗、指数関数、対数関数、三角関数等を定義する事ができる。更には逆ベクトルや複素係数のベクトル・スカラーなどを定義できるので四元数をより一般化した代数系と言えよう。本論においてはベクトル・スカラー環の定義と性質及びその応用例を示す。

キーワード　宇宙ロケット、座標変換、機体座標、慣性座標、ベクトルの回転、四元数、四元数ベクトル、回転角、回転軸、四元数ベクトル積、ベクトル・スカラー乗算、外積、内積

A Vector–Scalar Ring Algebra

―　―

Osamu Ichiyoshi

† Human Network for Better 21 Century
E-mail:　† osamu-ichiyoshi@muf.biglobe.ne.jp

Abstract

The flight control of space rockets or satellites requires a continuous co-ordinates conversion between the flying bodies and external inertia space. The co-ordinates transformation is equivalent to rotation of a vector around another axis vector by a specified angle. A very simple method of such coordinate transformation is based on quaternion algebra, which is a complex number system expanded to three dimensions.　The quaternion system is converted to a Vector-Scalar algebra maintaining the algebraic property as Ring by defining a new multiplication for vectors. The Vector-Scalar multiplication is defined as follows. For vectors **u** and **v, u** (x) **v** = **u** x **v** – (**u.v**), where **u** x **v** and (**u.v**) are respectively normal vector product and scalar product of vectors **u** and **v**. The two very different multiplications of vectors are thus unified by the single Vector-Scalar multiplication which is essentially the same as the multiplications of quaternions. The Vector-Scalar Ring is a further generalization of quaternions as the elements can also have complex values. For any vector **a** with a unit length, **a** (x) **a** = -1, which is similar to the imaginary number. Thus the formula e^(**a** θ) = cos(θ) + **a**.sin(θ) plays a similar role as Euler’s formula in complex number theory and enables definition of functions in Vector-Scalar systems to solve new genre of vector problems.

Keywords coordinates, conversion, rotation, vector, quaternion, Euler’s formula, Vector –Scalar multiplication

1.　四元数

1.1 定義と基本的性質

実数 a,b,c,d に対して以下の四元数が定義される。

$$z = a + ib + jc + kd \quad = (a,b,c,d)$$

ここで虚数 i, j, k は

$$i^2 = j^2 = k^2 = \quad i.j.k = -1$$
$$i \cdot j = -j \cdot i = k$$
$$j \cdot k = -k \cdot j = i$$
$$k \cdot i = -i \cdot k = j$$

四元数(a,b,c,d)のうち a を**実部**、(b,c,d)を**虚部**と呼ぶ。四元数は複素数の虚部を三次元に拡張したものと見る事ができよう。

四元数 z ,u, w に対して以下の性質がある。

z.u =/= u.z　　　　　交換律を満たさず
(z.u).w = z.(u.w) = z.u.w　結合律を満たす
z.(u+w) = z.u+z.w　　　分配律を満たす
(z+u).w = z.w+u.w

四元数とは結合律と分配律は満たすが交換律を満たさない代数系、即ち環である。

共役四元数

四元数 z = a + ib + jc + kd に対してその共役四元数 z*が以下のように定義される。

$$z^* = a - ib - jc - kd$$

四元数の絶対値

上の z と z*の積は

$$z.z^* = a^2 + b^2 + c^2 + d^2$$
$$= |z|^2$$

ここで|z|を z の絶対値又は大きさと呼ぶ。

四元数の実部と虚部

実部;　a= Re(z) = (z+z*)/2
虚部;(b, c. d).(**i, j, k**)= Im(z)=(z−z*)/2

1.2 四元数の応用

三次元空間における任意のベクトル **r**=(x,y,z)を四元数[r] = (w, x,y,z) に対応させる。w=0 は[r]の実部である。即ち三次元空間を四元数の虚部に対応させるのである。また記号[r]は四元数を明確に表示する為に用いる。
今方向余弦ベクトル (l, m, n) を虚部に含む四元数を[e] = (0, l, m, n)とする。
三次元空間におけるベクトル **r** を回転軸ベクトル **e** = (l, m, n) の周りに角θだけ回転させて得られるベクトルを **r**’とする
その回転公式は四元数で表現すると

$$[r'] = [T] \cdot [r] \cdot [T]^*$$

但し

$$[T] = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2).\mathbf{e}$$

2. ベクトル・スカラー環

2.1. ベクトル・スカラーの定義

三次元 vector 空間の座標単位ベクトル **i,j,k** に対して各々方向余弦 l,m,n を持つ単位 vector **e** を以下により定義する。

$$\mathbf{e} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$
$$(\mathbf{e}.\mathbf{e}) = l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

直角座標の単位ベクトルの性質をまとめると
ベクトルの内積、又はスカラー積;

$$(\mathbf{i}.\mathbf{i}) = (\mathbf{j}.\mathbf{j}) = (\mathbf{k}.\mathbf{k}) = 1$$
$$(\mathbf{i}.\mathbf{j}) = (\mathbf{j}.\mathbf{i}) = 0$$
$$(\mathbf{j}.\mathbf{k}) = (k.\mathbf{j}) = 0$$
$$(\mathbf{k}.\mathbf{i}) = (i.\mathbf{k}) = 0$$

外積またはベクトル積;

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$
$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$$
$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -k \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$$
$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{I} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

更に実数 a,b に対して **Vector-Scalar** を次式により定義する。

$$[\mathbf{z}] = a + b.\mathbf{e} \quad = (a, b.l, b.m, b.n)$$

上の a をベクトル・スカラー[**z**]の**スカラー部**、b.**e** を**ベクトル部**と呼ぶ事にしよう。

またベクトル・スカラー乗算(x) を次に定義する。
任意の vector **u, v**　に対して

$$\mathbf{u}\,(x)\,\mathbf{v} = \underset{(外積)}{\mathbf{u} \times \mathbf{v}} - \underset{(内積)}{(\mathbf{u}.\mathbf{v})}$$

演算(x)は被演算項の何れかが scalar 値である場合に対しては通常の乗算となるが共に vector なる場合に対しては上のような特殊な演算となる。

前述の定義から明らかなようにベクトル・スカラー乗算は四元数の乗算と本質的に同じである。
Vector 空間における乗算として(x)を元にすればベクトルの内積と外積は次のように定義する事もできる。

$(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = - \{ \mathbf{u} (x) \mathbf{v} + \mathbf{v} (x) \mathbf{u} \} / 2$ (内積)
$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \{ \mathbf{u}(x)\mathbf{v} - \mathbf{v}(x)\mathbf{u} \} / 2$ (外積)

また定義により

$$\mathbf{e}(x)\mathbf{e} = -1$$

となる。ここで上の単位ベクトル **e** を**軸ベクトル**(axis vector)と呼ぶ事にする。

[**z**] = a + b.**e** は複素数を四次元空間に拡張したもの或いは四元数の vector 的表現とも考えられる。

2.2　ベクトル共役

ベクトル・スカラー[**z**] = a + b.**e** の共役(conjugate)を

[**z**]`= a - b.**e**

と定義すると

[**z**] (x) [**z**]` = (a + b**e**) (x) (a – b**e**)
= a^2 + b^2
= |[**z**]|^2

となる。

ここで|[**z**]|は[**z**]の絶対値、または大きさである。

上の四元数ベクトルについて

[**z**] = a + b**e** の a を scalar 部、be を vector 部と定義すると

a = { [**z**] + [**z**]`}/2
= Sc[**z**] ;スカラー部(scalar part)

be = { [z] - [z]` }/2
= Vc[z] ;ベクトル部(vector part)

2.3 ベクトル共役と複素共役

スカラー部とベクトル部は一般に複素数値を取り得る。今ベクトル・スカラー[z]について

[z] = z0 + z1.**i**1 + z2.**i**2 + z3.**i**3
= (z0, z1, z2, z3)
= z0 + **z**

等と表記する。

但し

z = z1.**i**1 + z2.**i**2 + z3.**i**3
= (z1, z2, z3)

i1, **i** 2, **i** 3 は座標単位ベクトルである。

[z]のベクトル共役と複素共役は

[z]` = z0 – **z** (ベクトル共役)
[z]* = z0* + **z***　(複素共役)
[z]*` = z0* - **z***　(複素かつベクトル共役)

両者の積は

[z]` (x) [z]* = (z0 – **z**) (x) (z0* + **z***)
= z0.z0* + (**z** . **z***) + z0. **z*** - z0*. **z** - **z** x **z***

上のスカラー項は実数、ベクトル項は準虚数であるから

Sc ([z]` (x) [z]*) = Re ([z]` (x) [z]*)
= |z0|^2 + |**z**|^2
= |[z]|^2

Vc ([z]` (x) [z]*) = Im ([z]` (x) [z]*)
= z0. z* - z0*. z - z x z*

即ちスカラー部は非負の実部でありそれは[z]の絶対値の二乗に等しくベクトル部は純虚数のベクトルとなる。同様の結果は[z] (x) [z]*`についても成り立つ。

2.4. 異なる軸を有するベクトル・スカラーの演算

異なる軸 **e, f** に対する vector-scalar[z], [w]

[**z**] = a + b**e**
[**w**] = c + d**f**

とすると

[**z**](x)[**w**] =/= [**w**](x)[**z**] ;

交換律を満たさず。

但し **e = f** の場合には交換律を満たす。

共役演算については異なる軸ベクトル **e,f** についても一般に次式が成り立つ。

{[**z**](x)[**w**]}` = [**w**]`(x)[**z**]`

更に絶対値に関しては異なる軸の vector-scalar についても一般に次の関係が成り立つ。

|**z** (x) **w**| = |**z**|・|**w**|

3. Vector-Scalar 環代数

3.1 Vector-Scalar の極座標表示

ベクトル・スカラーと複素数には次の様に著しい類似性がある。

[1] 複素数の極座標表示

任意の複素数 z = x + iy = (x,y) に対して

x = r.cosΦ
y = r.sinΦ

とすると

z = r. (cosΦ + i. sin(Φ))
= r.e^(iΦ)

但し下記オイラーの公式を用いた。

e^(iΦ) = cos(Φ) +.i sin(Φ)

[2] ベクトル・スカラーの極座標表示

以上の複素数に類似の定式化がベクトル・スカラーについても可能である。

[T] = cos(θ)　+ sin (θ).**i**

これをθで微分すると

[d/dθ][T] = - sin(θ) + cos (θ).**i**

= **i** (x) [T]

これから形式的に

[T] = e^(**i** θ) = cos(θ)　+ sin (θ).**i**

この定義により共通の単位軸 vector の四元数的 vector 演算は回転角の加算となる。

e^(**i** θ)　(x)　e^(**i** Φ)　= e^(**i**(θ + Φ))

又一般のベクトル・スカラー[z]について次の様に極座標表示を行う事ができる。

ベクトル・スカラー[z]に対して

[z] = z0 + **z**

= |[z]|**.** (z0/ |[z]| + **z**/|[z]|)

= |[z]|. (z0/ |[z]| + z/|[z]|.**iz**)

= |[z]|. (cos(θ) + sin(θ). **iz**)

= |[z]|. e^(θ . **iz**)

但し

cos(θ) = z0 / |[z]|

sin(θ) =　z / |[z]|

iz = **z** / z

z はベクトル **z** の大きさである。

z = √(z1^2 + z2^2 + z3^2)

3.2 ベクトル・スカラーの集合は環を成す

ベクトル・スカラー[x], [y], [z]について

[1] 交換律を満たさず

[x] (x) [y] =/= [y] (x) [x]

[2] 結合律を満たす。

([x] (x) [y]) (x) [z] = [x] (x) ([y] (x) [z])

[3] 分配律を満たす。

[x] (x) ([y] + [z]) = [x] (x) [y] + [x] (x) [z]

([x] + [y]) (x) [z] = [x] (x) [z] + [y] (x) [z]

即ちベクトル・スカラーの全体は環(Ring)を成す。以上はベクトル・スカラーが四元数に等価な事から明らかであるがベクトル演算により遥かに簡便に直接計算で証明できる。

3.3 単位元と逆元

一般の数 a に対して a+ 0 = a,　a・1 = a である。a に対する加算の逆元は-a であり乗算の逆元は 1/a (a=/= 0)である。

ベクトル・スカラーにおいても[a]の加算に対する逆元は-[a]であるが乗算に対する逆元は何であろうか。

[a] (x) [a]` =　|[a|^2

であるから

[a] (x) [a]`/ |[a]|^2 = 1

故に[a]の逆数は

1/[a] = [a]` / |[a]|^2

また

[a] (x) 1/[a] = 1/[a] (x) [a] = 1

が成り立つ。

特に a0=0 の場合は

[a] = a0 + **a**　= **a**

1 / **a** = - **a** / |[a]|^2

即ち逆ベクトルとは方向は反対で大きさが元の逆数となるものである。

なお複素係数の場合には一般に大きさも複素数である。

3.4, ベクトル・スカラーの演算

[1] べき乗

極座標表示にすると簡単に分かる。

[z] = z0 + z

= |[z]|. e^(θ. iz)

これを n 乗すると

[z]^n = (z0 + z)^n

= |[z]|^n. e^(nθ. iz)

= |[z]|^n. (cos(n θ) + sin(nθ). **i**z)

[2] 平方根

極座標表示により

[z] = |[z]|. e^(θ. iz)

= |[z]|. e^((θ+2 π). iz)

これより

[x]^(1/2) = |[z]|^(1/2). e^(θ/2. iz)

及び

= - |[z]|^(1/2). e^(θ/2. iz)

2 個の解がある。

同様に n 乗根には n 個の解がある。n =1,2,,,

[3] 指数演算

実数 a, b と自然数 m に対して

a^2 = a・a

a^m・a^n = a^(m+n)

(a^m)^n = a^(m・n)

(a・b)^m = a^m・b^m

等が歴史的には最初の指数計算法則であった。後にその数の範囲は整数、有理数、実数そして複素数に拡張された。上の法則が成り立つ根拠は交換律にある事を注意すれば交換則が成り立たないベクトル・スカラー環における指数法則は自ずと異なってくる。

ベクトル・スカラー[z]を次のように表記する事とする。

[z] = z0 + **z**
= |[z]|.e^(<z).**i**z)

但し<z)は[z]の偏角である。

数 a に対して

a^[z] = a^(z0 + **z**)
= a^z0. a^ **z**
= a^z0. e^(log(a).z. **i**z)
= a^z0.(cos(log(a).z) + sin(log(a).z), **i**z)

と定義する。

すると数 a, b に対して次が成り立つ。

(a・b)^[z] = a^[z] (x) b^[z]

しかし数と異なりベクトル・スカラーには成り立たないものがある。

a^[z] (x) a^[w] =/= a^([z] + [w])

これは左辺が **z** x **w** の項を含むのに右辺は含まない事から明らかである。

また

([a] (x) [b])^2 =/= [a]^2 (x) [b]^2

ベクトル指数算を次のように定義する。

[a]^**z** = (|[a]|.e^(<a).**i**a))^ **z**
= |[a]|^**z** (x) e^(<a).**i**a (x) **z**)
= e^(log(|[a]|).z.**i**z) (x) e^(z.<a).**i**a x **i**z **)**
・e^(- z.<a).(**i**a.**i**z) **)**
= e^(- z.<a).(**i**a.**i**z) **)**
・(cos(log(|[a]|).z) + sin(log(|[a]|).z).**i**z)
(x) (cos(z.<a)) + sin(z.<a)).**i**a x **i**z)

一般のベクトル・スカラー指数法則を以下の様に定義するのが合理的であろう。

[a] ^[z] = [a]^(z0 + **z)**
= (|[a]|.e^(<a).**i**a))^ **(**z0 + **z)**
=|[a]|^(z0+**z)** (x) e^(<a).**i**a (x) (z0+**z**))
=|[a]|^z0・|[a]|^**z (x)** e^(z0<a).**i**a + z<a) **i**a (x) **i**z)

[4] 対数演算

ベクトル・スカラー[a]に対する対数を

[a] = |[a]|. e^(<a).**i**a)

に対して

log([a]) = log(|[a]|) + <a).**i**a

と定義しよう。

一般には

e^(2πn).**i**) = 1

であるから

log([a]) = log(|[a]|) + (2πn + <a).**i**a
(n= 0,+-1,+-2,,,,,)

即ち対数は無限多価対応演算である。

以下対数演算の性質を示す。

数αに対して

Log([a]^α) = α.log([a])
Log (α^[a]) = log(α)[a]

しかし一般に

Log([a] (x) [b]) =/= log([a]) + log([b])
Log ([a]^[b]) =/= (log[a]) (x) [b]

但し

Log([a] (x) [b]) = log(|[a]|.[[b]|) + <c).**i**c

ベクトル部は

[a] (x) [b] = |[a]|.[[b]|.e^(<c).**i**c)

による。

特に ia = **i**b の場合には

Log([a] (x) [b]) = log([a]) + log([b])
Log ([a]^[b]) = log([a]) (x) [b]

が成り立つ。

[5] 三角関数

三角関数はオイラーの公式

e^(iθ) = cos(θ)+ i.sin(θ)

により複素関数に関連して定義される。

cos(θ) = (e^(iθ) + e^(-iθ)) /2
sin(θ) = (e^(iθ) - e^(-iθ)) /(2i)

複素数　z = x +iy　に対して

cosh(z) = {e^z + e^(-z)}/2
= cosh(x).cos(y) + i.sinh(x). sin(y)
sinh(z) = {e^z – e^(-z)}/2
= sinh(x).cos(y) + i.cosh(x).sin(y)

複素数に習ってベクトル・スカラーの三角関数を以下のように定義する。

ベクトル・スカラー

$[x] = x0 + x.\mathbf{i}$

に対して

$\cosh([x]) = (e^{[x]} + e^{(-[x])}) / 2$

$\sinh([x]) = (e^{[x]} – e^{(-[x])}) / 2$

$\mathrm{cosv}(x) = (e^{(x.\mathbf{i})} + e^{(-x.\mathbf{i})}) / 2$

$\mathrm{sinv}(x) = (e^{(x.\mathbf{i})} - e^{(-x.\mathbf{i})}) / (2\mathbf{i})$

すると複素数と同様に

$\cosh([x]) = \cosh(x0 + x.\mathbf{i})$

$= \cosh(x0).\mathrm{cosv}(x) + \mathbf{i}.\sinh(x0).\ \mathrm{sinv}(x)$

$\sinh(z) = \sinh(x0 + x.\mathbf{i})$

$= \sinh(x0).\mathrm{cosv}(x) + \mathbf{i}.\cosh(x0).\mathrm{sinv}(x)$

が成り立つ。

4. ベクトル・スカラー環の応用

4.1. 一次方程式

[1] 基本一次方程式

[a] (x) [x] = [b]

の解は

[x] = 1/[a] (x) [b]

[2] 未知ベクトルの一次方程式

ベクトル **a, b** に対してベクトル積方程式

$\mathbf{a} \times \mathbf{y} = \mathbf{b}$ (4.1-1)

の解を求めよう。

ベクトル・スカラー形式にするために

随伴方程式

$\mathbf{a} . \mathbf{y} = \lambda$ (スカラー) (4.1-2)

を考える。

両方程式の差を取ると

$\mathbf{a}\ (x)\ \mathbf{y} = \mathbf{b} – \lambda$

これより

$\mathbf{y} = 1/\mathbf{a}\ (x)\ \mathbf{b} – \lambda/\mathbf{a}$

$= - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) / a^2 + (\mathbf{a.b}) / a^2 + \lambda\, \mathbf{a} / a^2$

y がベクトルであるためには

$(\mathbf{a.b}) = 0$

即ちベクトル a,b は直交していなくてはならない。

解は

$\mathbf{y} = - (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) / a^2 + \lambda\mathbf{a} / a^2$

この解はλを可変とすると式(4.1-1)の解を、ベクトル **b** を可変とすると式(4.1-2)の解を与える。

[3] [a] (x) [x] + [x] (x) [a] = [b]

この方程式はベクトル・スカラーの要素に分解して求める事ができる。

$[x] = x0 + \mathbf{x} = (x0, x1, x2, x3)$

[a], [b]についても同様である。

すると

[a] (x) [x] + [x] (x) [a]

$= (a0 + \mathbf{a})\ (x)\ (x0 + \mathbf{x}) + (x0 + \mathbf{x})\ (x)\ (a0 + \mathbf{a})$

$= 2(a0.x0 + a0.\mathbf{x} + x0.\mathbf{a} – (\mathbf{a.x}))$

$= (b0, b1, b2, b3)$

これを行列で表現すると

$$2 \begin{bmatrix} a0 & –a1 & –a2 & –a3 \\ a1 & a0 & 0 & 0 \\ a2 & 0 & a0 & 0 \\ a3 & 0 & 0 & a0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x0 \\ x1 \\ x2 \\ x3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b0 \\ b1 \\ b2 \\ b3 \end{bmatrix}$$

その解は

$x0 = ([a].[b]) / |[a]|^2$

$x1 = b1/a0 – a1/a0.x0$

$x2 = b2/a0 – a2/a0.x0$

$x3 = b3/a0 – a3/a0.x0$

但し

$([a].[b]) = a0.b0 + (\mathbf{a.b})$

$= a0.b0 + a1.b1 + a2.b2 + a3.b3$

4.2 連立方程式

[1] 基本方程式

[a] (x) [x] + [b] (x) [y] = [e]

[c] (x) [x] + [d] (x) [y] = [f]

行列形式では

$$T\ (x) \begin{bmatrix} [x] \\ [y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [e] \\ [f] \end{bmatrix}$$

T は係数行列

$$T = \begin{bmatrix} [a]\ [b] \\ [c]\ [d] \end{bmatrix}$$

解は

$$\begin{bmatrix} [x] \\ [y] \end{bmatrix} = [I:]T\ (x) \begin{bmatrix} [e] \\ [f] \end{bmatrix}$$

ただし

[I:]T は行列 T の逆行列である。

[2] ベクトル積とスカラー積方程式

ベクトル積

$\mathbf{a}$ x $\mathbf{x}$ + $\mathbf{b}$ x $\mathbf{y}$ = $\mathbf{e}$ (4.2-1a)

$\mathbf{c}$ x $\mathbf{x}$ + $\mathbf{d}$ x $\mathbf{y}$ = $\mathbf{f}$ (4.2-1b)

スカラー積

$\mathbf{a}.\mathbf{x} + \mathbf{b}.\mathbf{y} = \alpha$ (4.2-2a)

$\mathbf{c}.\mathbf{x} + \mathbf{d}.\mathbf{y} = \beta$ (4.2-2b)

両者の差を取ると

$$\mathrm{T}\ (\mathrm{x}) \begin{bmatrix} [x] \\ [y] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} - \alpha \\ \mathbf{f} - \beta \end{bmatrix}$$

これより基本方程式により解を求める事ができる。

例題

次の連立方程式を解け

$\mathbf{i}$ x $\mathbf{x}$ + $\mathbf{j}$ x $\mathbf{y}$ = $\mathbf{e}$

$\mathbf{k}$ x $\mathbf{x}$ + $\mathbf{i}$ x $\mathbf{y}$ = $\mathbf{f}$

随伴方程式は

$\mathbf{i}.\mathbf{x} + \mathbf{j}.\mathbf{y} = \alpha$

$\mathbf{k}.\mathbf{x} + \mathbf{i}.\mathbf{y} = \beta$

両方程式の差を取ると

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} \\ \mathbf{k} & \mathbf{i} \end{bmatrix} (\mathrm{x}) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{e} - \alpha \\ \mathbf{f} - \beta \end{bmatrix}$$

係数行列の逆行列は

$$[\mathrm{I}:]\mathrm{T} = -1/2 \begin{bmatrix} \mathbf{i}\text{-}1 & \mathbf{j}+\mathbf{k} \\ \mathbf{J}+\mathbf{k} & \mathbf{i}+1 \end{bmatrix}$$

故に

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = [\mathrm{I}:]\mathrm{T}\ (\mathrm{x}) \begin{bmatrix} \mathbf{e} - \alpha \\ \mathbf{f} - \beta \end{bmatrix}$$

ここで **x, y** が純ベクトルであるから

$$\begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j}+\mathbf{k} \\ -(\mathbf{k}+\mathbf{J}) & -\mathbf{i} \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

でなくてはならない事が判明する。

結局求める解は

$$\begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ \mathbf{y} \end{bmatrix} = -1/2 \begin{bmatrix} \mathbf{i}\text{-}1 & \mathbf{j}+\mathbf{k} \\ \mathbf{J}+\mathbf{k} & \mathbf{i}+1 \end{bmatrix} \mathrm{x} \begin{bmatrix} \mathbf{e} \\ \mathbf{f} \end{bmatrix}$$

$$+1/2 \begin{bmatrix} \alpha & \alpha & \beta \\ \beta & \alpha & \alpha \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} \mathbf{i} \\ \mathbf{j} \\ \mathbf{k} \end{bmatrix}$$

4.3 二次方程式

[1] 基本方程式

[y] (x) [y] + [a] (x) [y] + [y] (x) [a] + [b] = 0

これは以下のように変形できる。

{ [y] + [a] }^2 = [a]^2 – [b]

ただし

[y]^2 = [y] (x) [y]である。

これより

[y] = - [a] +- SQR{ [a]^2 – [b] }

但し

SQR{ [a]^2 – [b] }= { [a]^2 – [b] }^(1/2)

[2] 不完全二次方程式

[y]^2 + [a] (x) [y] + [b] = 0

随伴方程式

[y] (x) [a] = [c]

との和をとると

[y] (x) [y] + [a] (x) [y] + [y] (x) [a] + [b] = [c]

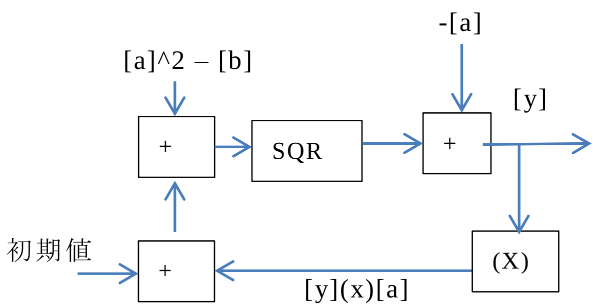
解は

[y] = - [a] +- { [a]^2 – [b] + [c]}^(1/2)

= - [a] +- SQR{ [a]^2 – [b] + [y](x)[a]}

これは再帰形式をしているので繰り返し計算により解を求める事ができよう。

別の見方をすると下記回路の動作となる。



例題
基本方程式

$$[x]^2 + \mathbf{i}\,(x)[x] + [x]\,(x)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} = 0$$

公式により

$$[x] = -\mathbf{i} \pm \mathrm{SQR}(\,\mathbf{i}\,(x)\,\mathbf{i} - \mathbf{j}\,)$$
$$= -\mathbf{i} \pm \mathrm{SQR}(\,-1 - \mathbf{j}\,)$$
$$= -\mathbf{i} \pm \mathrm{SQR}(\sqrt{2}\,(-1/\sqrt{2} \quad - \mathbf{j}/\sqrt{2}\,)$$
$$= -\mathbf{i} \pm \mathrm{SQR}(\sqrt{2}e\text{^}(5\pi/4.\,\mathbf{j}\,)\,)$$
$$= -\mathbf{i} \pm 2\text{^}(1/4)\,.e\text{^}(5\pi/8.\,\mathbf{j}\,)$$

不完全二次方程式

$$[x]^2 + \mathbf{i}\,(x)[x] + \mathbf{j} = 0$$

随伴方程式

$$[x]\,(x)\,\mathbf{i} \quad = [c]$$

両式の和は

$$[x]^2 + \mathbf{i}\,(x)[x] + [x]\,(x)\,\mathbf{i} + \mathbf{j} = [c]$$

解は

$$[x] = -\mathbf{i} \pm \mathrm{SQR}(\,\mathbf{i}\,(x)\,\mathbf{i} - \mathbf{j} + [c]\,)$$
$$= -\mathbf{i} \pm \mathrm{SQR}(\,-1 - \mathbf{j} + [x]\,(x)\,\mathbf{i}\,)$$

これは再帰的な構造をしているので繰り返し計算により解が求まるであろう。計算回路構成は上記による。

5. 結論

ベクトルにはベクトル積とスカラー積の二種の乗算があるが両者を合わせたベクトル・スカラー乗算を定義すると四元数に等価な環を成す代数系が得られる。さらにその係数は複素数値を取る事も出来るのでベクトル・スカラー環は四元数を更に一般化したものと言えるであろう。更にベクトルを単位として捉える事により複素数と類似の極座標表示や各種の関数を定義する事ができる。ベクトル・スカラー環代数によりベクトルとスカラーを含む広範な問題を系統的に解く事が可能になる。

参考文献

[1] 市吉　修　‘四元数ベクトル論’,
信学技報 IEICE Technical Report
SANE2021-26(2021-08)

[2] 今野紀雄　四元数　　　　　　森北出版

[3] 四次元の幾何学　　　　　プレアデス出版