

四元数的 vector 論

Quaternion-like Vector theory

市吉 修

2020/4/8

1. 複素数

実数 x, y に対して

$$z = x + iy \quad i \cdot i = i^2 = -1 \quad i; \text{虚数 (imaginary number)}$$

を複素数という。

複素数は二次元平面(x, y)で定義されている。

その次元を高次元に拡張する事はできないであろうか。

2. 四元数

実数 a, b, c, d に対して以下の四元数が定義される。

$$z = a + ib + jc + kd = (a, b, c, d)$$

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k$$

$$j \cdot k = -k \cdot j = i$$

$$k \cdot i = -i \cdot k = j$$

これは四元数 z, u, w に対して

$$z \cdot u \neq u \cdot z \quad \text{交換律を満たさず}$$

$$(z \cdot u) \cdot w = z \cdot (u \cdot w) = z \cdot u \cdot w \quad \text{結合律を満たす}$$

$$z \cdot (u + w) = z \cdot u + z \cdot w \quad \text{分配律を満たす}$$

代数系である。

3. 四元数的 vector 演算

四元数の大きな応用は vector 空間における vector の回転にある。

そこで三次元 vector 空間の座標単位ベクトル i, j, k に対して各々方向余弦 l, m, n を持つ単位 vector e を

$$e = li + mj + nk$$

$$e \cdot e = l^2 + m^2 + n^2 = 1 \quad (\text{ベクトル内積})$$

$$i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = 1 \quad (\text{ベクトル内積})$$

$$i \times j = -j \times i = k \quad (\text{ベクトル外積})$$

$$j \times k = -k \times j = i \quad (\text{ベクトル外積})$$

$$k \times i = -i \times k = j \quad (\text{ベクトル外積})$$

により定義する。

更に実数 a, b に対して四元数的 vectorを

$$[z] = a + b \cdot e$$

で定義する。

また四元数的 **vector** の演算として次の乗算(x) を定義する。

任意の **vector** **u, v** に対して

$$\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{v} - \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$$

(外積) (内積)

演算(x)は被演算項の何れかが **scalar** 値である場合に対しては通常の乗算となるが共に **vector** なる場合に対しては上のような特殊な演算となるのでこれを四元数的 **vector** 乗算と呼ぶ事にする。

この定義により

$$\mathbf{e}(\mathbf{x})\mathbf{e} = -1$$

となる。

Vector 空間における乗算として(x)を元にすればベクトルの内積と外積は次のように定義する事もできる。

$$\begin{aligned}\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} &= -\{ \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v} + \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{u} \} / 2 & (\text{内積}) \\ \mathbf{u}\mathbf{x}\mathbf{v} &= \{ \mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v} - \mathbf{v}(\mathbf{x})\mathbf{u} \} / 2 & (\text{外積})\end{aligned}$$

$[\mathbf{z}] = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}$ は複素数を三次元 **vector** 空間に拡張したものと考えられる。あるいは四元数の **vector** 的表現とも考えられる。この意味で四元数的 **vector** と呼び $[\mathbf{z}]$ または単純に **z** と表記する事にする。

四元数的ベクトル $[\mathbf{z}] = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}$ の共役を

$$[\mathbf{z}]^* = \mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{e}$$

とすると

$$\begin{aligned}[\mathbf{z}] (\mathbf{x}) [\mathbf{z}]^* &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}) (\mathbf{x}) (\mathbf{a} - \mathbf{b}\mathbf{e}) \\ &= \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 \\ &= |[\mathbf{z}]|^2\end{aligned}$$

となる。 $|[\mathbf{z}]|$ は $[\mathbf{z}]$ の絶対値、または大きさである。

上の四元数的ベクトルについて

$[\mathbf{z}] = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e}$ の **a** を scalar 部、**be** を vector 部 と定義すると

$$\begin{aligned}\mathbf{a} &= \{ [\mathbf{z}] + [\mathbf{z}]^* \} / 2 \\ \mathbf{be} &= \{ [\mathbf{z}] - [\mathbf{z}]^* \} / 2\end{aligned}$$

一般に異なる単位 **vector** を有する四元数的ベクトル $\mathbf{z}=\mathbf{a}+\mathbf{b}\mathbf{e}$ 、及び $\mathbf{w}=\mathbf{c}+\mathbf{d}\mathbf{f}$ について下記が成り立つ。

$$\{ \mathbf{z}(\mathbf{x})\mathbf{w} \}^* = \mathbf{w}^*(\mathbf{x})\mathbf{z}^*$$

4. 四元数的 **vector** の応用

三次元ベクトル空間において任意の **vector** **r** を方向余弦ベクトル $\mathbf{e} = \mathbf{li} + \mathbf{mj} + \mathbf{nk} = (l,m,n)$ の周りに角 θ だけ回転させて **vector** **r'** を得たとすると

$$\mathbf{r}' = \{ \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\mathbf{e} \} (\mathbf{x}) \mathbf{r} (\mathbf{x}) \{ \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2)\mathbf{e} \}^*$$

これは計算により

$$\mathbf{r}' = \mathbf{e}(\mathbf{r}\mathbf{e}) + \{ \cos(\theta) + \sin(\theta)\mathbf{e} \} \mathbf{x} \{ \mathbf{r} \cdot \mathbf{e}(\mathbf{r}\mathbf{e}) \}$$

(回転軸成分) (回転軸に直交する部分ベクトルを角 θ だけ回転する成分)

となるので幾何学的に明らかである。

5. 吟味

上の四元数的ベクトル演算は複素数あるいは四元数を用いず **vector** の内積と外積に基づいた演算で三次元空間のベクトルの回転を定式化できる。

同様の事は二次元平面でのベクトルの回転でも見られた。

複素数 $z = x + iy = (x, y)$ に対して

$$e^{i\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta).i$$

なる複素数をかけて角 θ の回転が実行される。

他方二次元平面でのベクトルの回転は複素数を使わなくても行列を使えば可能である。

ベクトル $[x, y]$ (縦ベクトル)に対して行列 $[i]$

$$[i] = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

を定義すると

$$[i].[x, y] = [-y, x]$$

であり、行列 $[i]$ は縦ベクトルを角 $\pi/2$ だけ回転する事が分かる。これを二回行えば角 π だけ回転するから

$$[i].[i] = -[I]$$

但し $[I]$ は二元単位行列である。

一般に角 θ の回転に対しては

$$\begin{aligned} \cos(\theta) [I] + \sin(\theta) [i] &= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

になる。

以上の複素数に類似の定式化が四元数的ベクトルについて可能である。

$$[T] = \cos(\theta) + \sin(\theta).e$$

これを θ で微分すると

$$\begin{aligned} [d/d\theta][T] &= -\sin(\theta) + \cos(\theta).e \\ &= e(x) [T] \end{aligned}$$

これから形式的に

$$e^{e\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta).e$$

この定義により共通の単位 **vector** の四元数的 **vector** 演算が簡単になる。

$$e^{e\theta}(x) e^{e\Phi} = e^{e(\theta+\Phi)}$$

前述のように三次元空間におけるベクトルの回転は四元数や四元数的ベクトルを使わなくとも計算可能であるが、回転軸が次々と変わる状況でのベクトル回転の演算は四元数的ベクトルを用いる方が便利だと思われる。