

四元数ベクトル論

市吉 修

二十一世紀を楽しく生きよう会
‡ 神奈川県相模原市緑区上九沢 230-7

E-mail: osamu-ichiyoshi@muf.biglobe.ne.jp

あらまし

宇宙ロケットや衛星等の飛行体の制御には飛行体に固定した機体座標系と宇宙に固定した慣性座標系との持続的な変換が必要不可欠である。その為飛行体には加速度及び角速度測定系とその測定値に基づき姿勢制御を行う座標変換系が装備される。座標変換は機体に固定したあるベクトルを測定系より与えられる回転軸ベクトルとその周りの回転角により三次元空間におけるベクトルの回転を行う事により実行される。その優美な方法として四元数を用いる方法がある。四元数は虚数を三次元に拡張したものと見なせるが、虚数を用いずにベクトルだけを用いる方法はないであろうか。四元数の定義は三次元ベクトルのベクトル積に類似している事からベクトル演算として筆者は四元数ベクトル積($\mathbf{x}$)なるものを考案した。それはベクトル $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対して $\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ として定義される。但し $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ は通常のベクトル積あるいは外積、 $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ はスカラー積あるいは内積である。このようにして四元数ベクトル代数系を定義するとそれは本質的には四元数代数系に等価でありながら内積と外積その他のベクトル演算により遥かに簡潔に計算を行う事ができる。

四元数ベクトル積は単位大きさの任意のベクトル $\mathbf{a}$ に対して $\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{a} = -1$ となるので虚数に類似の性質を持っている。これより回転角 θ に対して $\cos(\theta) + \mathbf{a} \cdot \sin(\theta) = e^{(\mathbf{a} \cdot \theta)}$ としてベクトルに対する指数関数を定義する事ができる。これにより空間におけるベクトルの回転を極めて簡潔に表現できる。

キーワード 宇宙ロケット、座標変換、機体座標、慣性座標、ベクトルの回転、四元数、四元数ベクトル、回転角、回転軸、四元数ベクトル積、外積、内積

A Quaternion Vector Theory

Osamu Ichiyoshi

† Human Network for Better 21 Century

E-mail: † osamu-ichiyoshi@muf.biglobe.ne.jp

Abstract

In order for the flight control of such flying objects as space rockets or satellites a continuous conversion between the coordinates systems fixed with the fuselage and external inertia space itself. Those flying machines are equipped with coordinate transformation systems that operate based on the data given by acceleration or angular velocity detections systems. The coordinates transformation is made by rotation of a reference vector around the axis vector by amount of the angle given by the above control systems. One of the very beautiful methods of such coordinate transformation is based on the quaternion algebra, which is a complex number system expanded to three dimensions. Is it possible to replace the complex number system with a real vector system? The author has achieved this by defining a quaternion vector product ($\mathbf{x}$) as follows. For vectors $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$, $\mathbf{u}(\mathbf{x})\mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$, where $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ and $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v})$ are respectively normal vector product and scalar product of vectors $\mathbf{u}$ and $\mathbf{v}$. The proposed quaternion vector system is essentially equivalent to the quaternion system but formulae can be handled much more easily by use of the vector and scalar products means. For any vector $\mathbf{a}$ with a unit length, $\mathbf{a}(\mathbf{x})\mathbf{a} = -1$, which is similar to the imaginary number. Thus the formula $e^{(\mathbf{a} \cdot \theta)} = \cos(\theta) + \mathbf{a} \cdot \sin(\theta)$ can simplify formulae expressions.

Keywords coordinates, conversion, rotation, vector, quaternion, inertia, fuselage, vector product, scalar product

1. 三次元空間におけるベクトルの回転公式

機体座標系に於いてベクトル $\mathbf{r}$ を回転軸ベクトル $\mathbf{a}$ の周りに角 θ だけ回転させて得られるベクトルを $\mathbf{r}'$ とする。ここで回転軸ベクトル $\mathbf{a}$ の大きさを 1 とする。 $(\mathbf{a}, \mathbf{a}) = 1$.

先ず元のベクトル $\mathbf{r}$ は一般的に次式で表現できる。

$$\mathbf{r} = (\mathbf{r}, \mathbf{a})\mathbf{a} + \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \quad (1.1)$$

第一項は軸ベクトル $\mathbf{a}$ 成分、第二項は $\mathbf{a}$ と直交な成分である。

求めるベクトル $\mathbf{r}'$ は

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{a} \times (\mathbf{r} \times \mathbf{a}) \cdot \cos(\theta) + (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \cdot \sin(\theta) + (\mathbf{r}, \mathbf{a})\mathbf{a} \\ &= (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) \times \{\mathbf{a} \cdot \cos(\theta) + \sin(\theta)\} + (\mathbf{r}, \mathbf{a})\mathbf{a} \end{aligned} \quad (1.2)$$

以下同様の手法で $\mathbf{r}'$ を軸ベクトル $\mathbf{a}'$ の周りに角 θ' だけ回転させてベクトル $\mathbf{r}''$ を得る事ができる。

2. 四元数を用いたベクトル回転の公式

上のベクトル回転は四元数により更に優美な表現が可能である。

2.1. 四元数

実数 a, b, c, d に対して以下の四元数が定義される。

$$z = a + ib + jc + kd = (a, b, c, d)$$

ここで虚数 i, j, k は

$$i^2 = j^2 = k^2 = i \cdot j \cdot k = -1$$

$$i \cdot j = -j \cdot i = k$$

$$j \cdot k = -k \cdot j = i$$

$$k \cdot i = -i \cdot k = j$$

四元数 (a, b, c, d) のうち a を**実部**、 (b, c, d) を**虚部**と呼ぶ。四元数は複素数の虚部を三次元に拡張したものとする事ができよう。

四元数 z, u, w に対して以下の性質がある。

$$z \cdot u \neq u \cdot z \quad \text{交換律を満たさず}$$

$$(z \cdot u) \cdot w = z \cdot (u \cdot w) = z \cdot u \cdot w \quad \text{結合律を満たす}$$

$$z \cdot (u + w) = z \cdot u + z \cdot w \quad \text{分配律を満たす}$$

四元数とは結合律と分配律は満たすが交換律を満たさない代数系である。

共役四元数

四元数 $z = a + ib + jc + kd$ に対してその共役四元数 z^* が以下のように定義される。

$$z^* = a - ib - jc - kd$$

四元数の絶対値

上の z と z^* の積は

$$\begin{aligned} z \cdot z^* &= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \\ &= |z|^2 \end{aligned}$$

ここで $|z|$ を z の絶対値又は大きさと呼ぶ。

2.2 四元数の応用

三次元空間における任意のベクトル $\mathbf{r} = (x, y, z)$ を四元数 $[r] = (w, x, y, z)$ に対応させる。 $w=0$ は $[r]$ の実部である。即ち三次元空間を四元数の虚部に対応させるのである。また記号 $[r]$ は四元数を明確に表示する為に用いたが誤解を生じない時には記号 $[]$ は省略しても良い。

今方向余弦ベクトル (l, m, n) を虚部に含む四元数を $[e] = (0, l, m, n)$ とする。

三次元空間におけるベクトル $\mathbf{r}$ を回転軸ベクトル $\mathbf{e} = (l, m, n)$ の周りに角 θ だけ回転させて得られるベクトルを $\mathbf{r}'$ とする

その回転公式は前述の式(1.2)で与えられるがそれを四元数で表現すると

$$[r'] = [T] \cdot [r] \cdot [T]^*$$

但し

$$[T] = \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot [e]$$

となる。これは直接計算により(1.2)に等しい事が確認される。

これは非常に示唆に富む公式であるが、計算が複雑であるので虚数を使わずすべてを実ベクトルで計算できる方法を以下に考察する。

3. 四元数ベクトル代数論

3.1. 四元数ベクトル

三次元 vector 空間の座標単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ に対して各々方向余弦 l, m, n を持つ単位 vector $\mathbf{e}$ を以下により定義する。

$$\mathbf{e} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k}$$

$$(\mathbf{e}.\mathbf{e}) = l^2 + m^2 + n^2 = 1$$

直角座標の単位ベクトルの性質をまとめると
ベクトルの内積、又はスカラー積;

$$(\mathbf{i}.\mathbf{i}) = (\mathbf{j}.\mathbf{j}) = (\mathbf{k}.\mathbf{k}) = 1$$

外積またはベクトル積;

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = -\mathbf{j} \times \mathbf{i} = \mathbf{k}$$

$$\mathbf{j} \times \mathbf{k} = -\mathbf{k} \times \mathbf{j} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{k} \times \mathbf{i} = -\mathbf{i} \times \mathbf{k} = \mathbf{j}$$

更に実数 a, b に対して **四元数 vector** を次式により定義する。

$$[\mathbf{z}] = a + b.\mathbf{e} = (a, b.l, b.m, b.n)$$

上の a を四元数ベクトル $[\mathbf{z}]$ の **スカラー部**、 b を **ベクトル部** と呼ぶ事にしよう。

また四元数 **vector** の演算として次の乗算 (x) を定義する。

任意の **vector** $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ に対して

$$\mathbf{u} (x) \mathbf{v} = \mathbf{u} \times \mathbf{v} + (\mathbf{u}.\mathbf{v}) \quad \text{(外積)} \quad \text{(内積)}$$

演算 (x) は被演算項の何れかが scalar 値である場合に対しては通常の乗算となるが共に **vector** なる場合に対しては上のような特殊な演算となるのでこれを **四元数 vector 乗算** と呼ぶ事にする。

前述の定義から明らかなように四元数 **vector 乗算** は四元数の乗算と本質的に同じである。

Vector 空間における乗算として (x) を元にするればベクトルの内積と外積は次のように定義する事もできる。

$$(\mathbf{u}.\mathbf{v}) = -\{ \mathbf{u} (x) \mathbf{v} + \mathbf{v} (x) \mathbf{u} \} / 2 \quad \text{(内積)}$$

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \{ \mathbf{u} (x) \mathbf{v} - \mathbf{v} (x) \mathbf{u} \} / 2 \quad \text{(外積)}$$

また定義により

$$\mathbf{e}(x)\mathbf{e} = -1$$

となる。ここで単位ベクトル $\mathbf{e}$ を **軸ベクトル** (axis vector) と呼ぶ事にする。

$[\mathbf{z}] = a + b.\mathbf{e}$ は複素数を四次元空間に拡張したもの
の或いは四元数の **vector** 的表現とも考えられる。
この意味で **四元数 vector** (Quaternion vector) と呼
び $[\mathbf{z}]$ または単純に z と表記する事にする。

3.2 四元数 vector 共役

四元数ベクトル $[\mathbf{z}] = a + b.\mathbf{e}$ の共役(conjugate)を

$$[\mathbf{z}]^* = a - b.\mathbf{e}$$

と定義すると

$$\begin{aligned} [\mathbf{z}] (x) [\mathbf{z}]^* &= (a + b.\mathbf{e}) (x) (a - b.\mathbf{e}) \\ &= a^2 + b^2 \\ &= |[\mathbf{z}]|^2 \end{aligned}$$

となる。ここで $|[\mathbf{z}]|$ が $[\mathbf{z}]$ の絶対値、または大きさである。

上の四元数ベクトルについて

$[\mathbf{z}] = a + b.\mathbf{e}$ の a を scalar 部、 b を vector 部と定義すると

$$\begin{aligned} a &= \{ [\mathbf{z}] + [\mathbf{z}]^* \} / 2 \\ &= \text{Sc}[\mathbf{z}] \quad ; \text{スカラー部(scalar part)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b &= \{ [\mathbf{z}] - [\mathbf{z}]^* \} / (2 \mathbf{e}) \\ &= \text{Vc}[\mathbf{z}] \quad ; \text{ベクトル部(vector part)} \end{aligned}$$

ここで $1/\mathbf{e} = -\mathbf{e}$ である。何故なら $(1/\mathbf{e}) (x) \mathbf{e} = 1$ 。

3.3. 異なる軸を有する四元数 vector の演算

異なる軸 **vector** $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ に対する四元 **vector** $[\mathbf{z}], [\mathbf{w}]$

$$[\mathbf{z}] = a + b.\mathbf{e}$$

$$[\mathbf{w}] = c + d.\mathbf{f}$$

とすると

$$[\mathbf{z}] (x) [\mathbf{w}] \neq [\mathbf{w}] (x) [\mathbf{z}] \quad ;$$

交換律を満たさず。

但し $\mathbf{e} = \mathbf{f}$ の場合には交換律を満たす。

共役演算については異なる軸ベクトル $\mathbf{e}, \mathbf{f}$ についても一般に次式が成り立つ。

$$\{ [\mathbf{z}] (x) [\mathbf{w}] \}^* = [\mathbf{w}]^* (x) [\mathbf{z}]^*$$

更に絶対値に関しては異なる軸 **vector** の四元 **vector** についても一般に次の関係が成り立つ。

$$|[\mathbf{z}] (x) [\mathbf{w}]| = |[\mathbf{z}]| \cdot |[\mathbf{w}]|$$

4. 四元数 vector の応用

三次元空間において任意の **vector** $\mathbf{r}$ を方向余弦ベクトル $\mathbf{e} = l\mathbf{i} + m\mathbf{j} + n\mathbf{k} = (l, m, n)$ を軸(axis)としてその周りに角 θ だけ回転させて **vector** $\mathbf{r}'$ を得たとすると

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \{ \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot \mathbf{e} \} \\ &\quad (\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r} \\ &\quad (\mathbf{x}) \{ \cos(\theta/2) + \sin(\theta/2) \cdot \mathbf{e} \}^* \end{aligned}$$

となる。これは直接計算により

$$\begin{aligned} \mathbf{r}' &= \mathbf{e}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) + \{ \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{e} \} \times \{ \mathbf{r} - \mathbf{e}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \} \\ &= (\mathbf{e} \times \mathbf{r}) \times \{ \mathbf{e} \cdot (\cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{e}) \} + (\mathbf{r} \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} \end{aligned}$$

となる事により確認できる。

5. 四元数 vector の性質

上述のように四元数ベクトル演算により三次元空間のベクトルの回転を簡潔に定式化、且つ計算できる。それは二次元平面におけるベクトルの回転を複素数により表現する方法の拡張と見る事ができる。
更に四元数ベクトルと複素数には次の様に著しい類似性がある。

複素数の極座標表示

任意の複素数 $z = x + iy = (x, y)$ に対して

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos \Phi \\ y &= r \cdot \sin \Phi \end{aligned}$$

とすると

$$\begin{aligned} z &= r \cdot (\cos \Phi + i \cdot \sin(\Phi)) \\ &= r \cdot e^{i\Phi} \end{aligned}$$

但し下記オイラーの公式を用いた。

$$e^{i\Phi} = \cos(\Phi) + i \sin(\Phi)$$

複素数 z に複素数 $e^{i\theta} = \cos(\theta) + i \sin(\theta)$ を乗ずると

$$z \cdot e^{i\theta} = r \cdot e^{i(\theta+\Phi)}$$

即ち角 θ の回転が実行される。

四元数ベクトルの極座標表示

以上の複素数に類似の定式化が四元ベクトルについても可能である。

$$[\mathbf{T}] = \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{e}$$

これを θ で微分すると

$$\begin{aligned} [d/d\theta][\mathbf{T}] &= -\sin(\theta) + \cos(\theta) \cdot \mathbf{e} \\ &= \mathbf{e}(\mathbf{x})[\mathbf{T}] \end{aligned}$$

これから形式的に

$$[\mathbf{T}] = e^{\mathbf{e}\theta} = \cos(\theta) + \sin(\theta) \cdot \mathbf{e}$$

この定義により共通の単位軸 vector の四元数的 vector 演算は回転角の加算となる。

$$e^{\mathbf{e}\theta}(\mathbf{x}) \cdot e^{\mathbf{e}\Phi} = e^{\mathbf{e}(\theta+\Phi)}$$

この記述を用いると前述の空間におけるベクトル回転の公式は

$$\mathbf{r}' = e^{\mathbf{e}\theta/2}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{r}(\mathbf{x}) \cdot e^{-\mathbf{e}\theta/2}$$

と非常に簡単化される。

結論

軸 $\mathbf{e}$ を有する四元数ベクトル $[\mathbf{z}] = \mathbf{a} + \mathbf{b}\mathbf{e} = (\mathbf{a}, \mathbf{b})$, $[\mathbf{w}] = \mathbf{c} + \mathbf{d}\mathbf{e} = (\mathbf{c}, \mathbf{d})$ に対して乗算を四元数ベクトル乗算とすると和差積商の四則演算形式は複素数と全く同様である。この意味で四元数ベクトルは複素数の四次元空間への拡張になっていると言えよう。任意の空間におけるベクトルを虚軸とする複素関数論の物理的意味が何であるかは興味あるところである。またオイラーの公式が虚数の指数関数を定義する事に習って本論ではベクトルの指数関数を定義し、空間におけるベクトルの回転演算の意味を明確にした。

また異なる単位 vector を持つ四元ベクトルについて前述の如く共役及び絶対値の乗算規則が成り立つ事は空間におけるベクトルを異なる軸の周りに順次回転して得られる結果はある一つの軸の周りのある角度の一個の回転に等価な事を示している。

参考文献

- [1] 飯野明 よく分かる航空力学の基本[第二版]
秀和システム 2009
- [2] 宮澤政文 宇宙ロケット工学入門
朝倉書店 2016
- [3] 今野紀雄 四元数 森北出版
- [4] 四次元の幾何学 プレアデス出版