

電磁気学の基礎再考

市吉 修

†二十一世紀を楽しく生きよう会

〒252-0136 神奈川県相模原市緑区上九沢 2 3 0 - 7

E-mail: osamu-ichiyoshi@muf.biglobe.ne.jp

あらまし

学校で教わる電磁気学は J.C.Maxwell が 1864 年に発表した 6 個の方程式を基礎としている。更に基礎的な法則として磁界の中を運動する荷電粒子に働く Lorentz 力がある。それは磁界 $\mathbf{B}$ の中で速度 $\mathbf{v}$ で運動する粒子にはベクトル積 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ で表される電界が生じる事を意味する。Maxwell の方程式と Lorentz 電界は共に電磁気学の基礎として適宜応用されるが、両者の関係については解説される事が少ないようである。他方 1905 年に A.Einstein が発表した論文「運動体の電気力学」において Lorentz 電界は相対性原理に基づく形で自然に導出された。即ち Lorentz 電界とは相対論的な現象であったのである。但しその電界は $\beta \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ で表される。ここで $\beta = \sqrt{1 - (v/c)^2}$ である。v は静止系に対する移動系の速度、c は光速である。即ち Lorentz 電界は相対論的な現象であり、通常形式は $v/c \ll 1$ の場合に当たる近似的なものではないのかという疑問を筆者は持ってきた。その疑問は Maxwell の方程式から直接 Lorentz 電界を導く事と相対性理論の学習により氷解したので報告する。

キーワード

電磁気学、Maxwell の方程式、Lorentz 力、電磁誘導、特殊相対性理論、サイクロトロン、相対論的質量、相対論的エネルギー

A Review of Basic Electromagnetism

Osamu Ichiyoshi

Human Network for Better 21 Century

230-7 Kamikuzawa, Midori-ku, Sagami-hara City, Kanagawa prefecture, 252-0136 Japan

E-mail: osamu-ichiyoshi@muf.biglobe.ne.jp

Abstract

The electromagnetism taught at schools is usually based on the six equations published by J.C. Maxwell in 1864. There is another basic electromagnetic phenomenon called Lorentz' force, which states that to a moving particle at velocity $\mathbf{v}$ in a magnetic field $\mathbf{B}$ feels an electric field expressed by the vector product $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$. The two theories are applied properly to practical problems but their mutual relations seem rarely presented.

On the other hand the Lorentz' force was derived quite naturally in the paper "On electric dynamics of moving bodies" by A.Einstein in 1905 based on the relativity principle. However, the given formula is $\beta \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B}$, where $\beta = \sqrt{1 - (v/c)^2}$. $\mathbf{v}$ is the velocity of the moving particle, c is the speed of the light in vacuum. The author understood the Lorentz's field is a relativistic phenomenon but had the doubt that the usual expression is only approximate that hold only for $v/c \ll 1$. The doubt is now cleared by deriving Lorentz formula from Maxwell's equations directly and further study of the relativistic theory as herein reported.

Keywords Electromagnetism, Maxwell's equations, Lorentz's force, Special relativistic theory,

1. Maxwell の電磁界基礎方程式

電磁気学の包括的な基礎は J.C. Maxwell により確立された (1864)。以下の基礎方程式において **E, H** はそれぞれ電界 (Electric field) vector, 磁界 (Magnetic field) vector であり共に位置と時間の関数である。

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t \quad (1-1)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B} / \partial t \quad (1-2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (1-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho \quad (1-4)$$

ただし

$$\mathbf{B} = \mu \cdot \mathbf{H} \quad (1-5)$$

$$\mathbf{D} = \varepsilon \cdot \mathbf{E} \quad (1-6)$$

J は電流密度 (Electric current density) ベクトル、**B, D** はそれぞれ磁束密度 (Magnetic flux density), 電束密度 (Electric flux density) ベクトルである。 μ 、 ε は各々透磁率 (permeability), 誘電率 (permittivity) であり、以下において扱う等方性 (isotropic) の媒質においては定数となる。

ρ は電荷密度 (electric charge density) でスカラー (scalar) 量である。

∇ は微分演算子であり (x, y, z) 方向の単位ベクトルを **i, j, k** とすると

$$\nabla = \mathbf{i} \partial / \partial x + \mathbf{j} \partial / \partial y + \mathbf{k} \partial / \partial z \quad (1-7)$$

式(1-1)は Ampere の法則、すなわち電流が磁界を発生する法則を示している。 $\partial \mathbf{D} / \partial t$ は電流と同様の性質を有し、変位電流 (Displacement current) と呼ばれる。

式(1-2)は Faraday の電磁誘導 (Electro-magnetic induction) 法則、すなわち磁束密度 **B** の時間変化が電界を生ずる法則を示している。式(1.4)は Gauss の法則であり、電界と電荷の関係を与える。式(1.3)は電荷に対応する磁荷は存在しない事を物語る。

2. Lorentz 力

上の Maxwell の方程式に加えて電磁気学の基礎的なものに Lorentz 力がある。

電界 **E**, 磁界 **B** の電磁界に電気量 q の粒子が速度 **v** で運動していると力 $\mathbf{f} = q \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ を受ける。

即ちベクトル積 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は等価的に電界であるがその一つの根源的な説明は 1905 年の A. Einstein による論文「運動体の

電気力学」において特殊相対性理論によって与えられた[1]。

アインシュタインは運動する荷電粒子が磁界の中に電界を生ずる現象を起電力と名づけた。

本節においては相対性理論によらず M. Faraday によって発見され J. C. Maxwell によって定式化された電磁誘導の方程式から起電力を直接導く事とする。

電荷 q を帯びた粒子がこの電磁界の中を速度 **v** で運動しているものとする。

電磁誘導の式を時間積分して

$$\int \nabla \times \mathbf{E} dt = - \mathbf{B}$$

すると

$$\begin{aligned} q \cdot \mathbf{v} \times \mathbf{B} &= -q \int \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{E}) dt \\ &= q \int [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{E} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{E})] dt \\ &= \int [(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{f} - \nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})] dt \end{aligned}$$

但し $\mathbf{f} = q \cdot \mathbf{E}$ は荷電粒子に電界が作用する力である。

他方荷電粒子の質量を m とすると力 **f** は次の様な力学的表現も可能である。

$$\mathbf{f} = q \cdot \mathbf{E} = m \cdot \partial \mathbf{v} / \partial t$$

すると

$$(\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{f} = m \cdot (\mathbf{v} \cdot \nabla) \partial \mathbf{v} / \partial t = 0$$

他方 $\nabla(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})$ についてみると $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{f})$ は単位時間当たりの力学的な仕事でありその時間積分は仕事となる。

ここでは他にエネルギーの支出は無いのでその仕事は力学的 Potential ϕ として蓄積される筈である。

以上をまとめると

$$q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) = - \nabla \phi$$

即ち $q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ は力であり従って $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ は磁界と運動する荷電粒子により生ずる起電力に由来する電界である事が分かる。

例 1

一様な磁界 **B** に初速度 **v** で電荷 q を帯びた粒子が突入したとする。起電力によってこの荷電粒子が受ける力 $q \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{B})$ は磁界 **B** にも速度 **v** にも直交する。即ちその荷電粒子は磁界 **B** に垂直な平面上で円軌道上の運動を行う。この運動は

荷電粒子加速器 Cyclotron に応用されている。

その円の半径を r とすると円軌道の求心力は起電力に由る電界によって与えられる事から

$$m.v^2/r = q.v.B$$

軌道円の半径 r は

$$r = (m.v) / (q.B)$$

上の円運動は円の中心に固定され、電荷 q とは逆極性の電荷 q' により及ぼされる静電界的求心力による円運動に等価である。

$$-(q.q')/(r^2) = q.v.B$$

これより

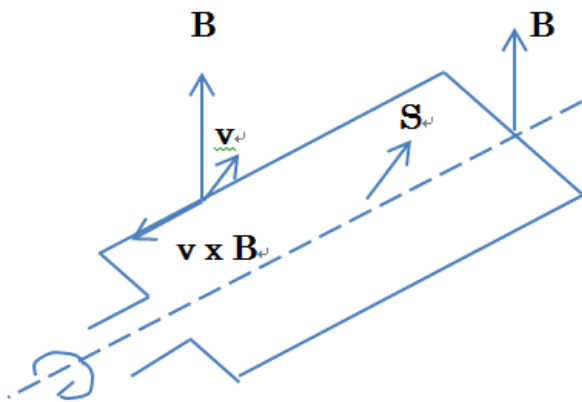
$$q' = -(m.v / q)^2 / B$$

等価静電 Potencial は

$$\phi = q' / r$$

例 2

一様電界 B の中に下図のような導体の輪を外力により回転させるものとする。



上述の議論により左の輪の上では手前、下では奥行方向に起電力による電界 E が生じる。即ち導線内の荷電粒子に働く Lorentz 力を生ずる電界である。これは輪に沿った線積分により輪の両端に

$$\int E ds = v.B.2L.\sin(\theta)$$

なる電位差 V を生ずる。但し $2L$ は導体の長さ、 θ は v, B 間の角である。

上の回転子の半径を r 、回転の角速度を ω とすると回転子の速さは $v = r.\omega$ であるから

$$V = 2r.\omega.B.L.\sin(\theta) \quad (\theta = \omega.t \quad t; \text{時間})$$

これが M. Faraday の電磁誘導に他ならない事を以下に示す。

Faraday の電磁誘導方程式は

$$\nabla \times E = - \partial B / \partial t$$

これを上記回転子について面積分すると

$$\begin{aligned} \int \nabla \times E dS &= - \int \partial B / \partial t dS \\ &= - [\partial / \partial t] \int B dS \\ &= - [\partial / \partial t] 2rL \cos(\theta) \end{aligned}$$

左辺は Stokes の定理により線積分となり

$$\int \nabla \times E dS = \int E dl = -V$$

故に

$$\begin{aligned} V &= [\partial / \partial t] 2rL \cos(\theta) \\ &= 2r.\omega.B.L.\sin(\theta) \end{aligned}$$

以上で Lorentz 力と電磁誘導が等価な事が示された。

この輪を外部の回路につなぐと電流が流れ、発電機として作用する。逆に外部より電流を供給すると磁界中の輪に回転力が生じ電動機として作用する。

3. 特殊相対性理論

Lorentz 力に関する別の見方がアインシュタインの相対性理論(1905)[1]から得られる。

3-1 相対論運動学

光速一定の原理

実験によって確立された真空中の光の速度は観測者の運動状態によらず常に一定であるという事実を原理に据えて相対性理論は構築されている。即ち $c = 3 \times 10^8(m/s)$ 。

これは光を粒子のように考えると理解不能であるが波として考えると納得できる。電磁界の基礎を成す Maxwell の方程式から $c = 1/\sqrt{(\epsilon.\mu)}$ となる。但し ϵ は真空の誘電率、 μ は透磁率である。真空の物理的性質は観測者の運動状態に依らない筈なのでこの原理は筆者にはとても自然な事に感じられる。

ガリレイ変換

二つの観測系 K と k があり k は K に対して x 軸方向に速度 v で等速に移動しているものとする。

観測系 K と k の時間及び空間座標をそれぞれ(t , x), (τ , ξ)とする。古典物理学のガリレイ変換とは

$$\xi = x - v.t$$

$$\tau = t$$

これは日常生活では全く自然な関係、即ち空間と時間は全く独立である事を示す。k 系で速度 w の物を K 系で観測すると速度は v+w となる。w=c の場合には光速を越え得る事になり観測事実に合わない。

Lorentz 変換

光速不変の原理を満たすには K 系の座標(t, x, y, z)と k 系の座標(τ, ξ, η, ζ)の間には次の Lorentz 変換が成り立たなくてはならない。

$$\xi = \beta.(x - v.t) \quad (3.1-1)$$

$$\tau = \beta.(t - v/c^2.x) \quad (3.1-2)$$

$$\eta = y \quad (3.1-3)$$

$$\zeta = z \quad (3.1-4)$$

但し

$$\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2} \quad (3.1-5)$$

相対性原理

移動系 k から静止系 K を観測する場合には上の v を -v としたものが同じ形で成立する筈である。

$$x = \beta.(\xi + v.\tau) \quad (3.1-1)'$$

$$t = \beta.(\tau + v/c^2.\xi) \quad (3.1-2)'$$

$$y = \eta \quad (3.1-3)'$$

$$z = \zeta \quad (3.1-4)'$$

四次元連続体

静止系の中では時間 t と空間(x, y, z)は独立であるがそこから移動系を観測するとその時間と空間は最早独立では無い。時間と空間を合わせた四次元連続体を成す。

運動体の時間の遅れ

運動系 k の原点 ξ = 0 に置かれた時計の示す時間を静止系 K で観測すると

$$\tau = 1/\beta.t = \sqrt{1 - (v/c)^2} t$$

運動体の長さの縮み

運動系の(τ 1, ξ 1) 及び(τ 2, ξ 2)なる二世界点の差は静止系において

$$x_2 - x_1 = \beta. \{ (\xi_2 - \xi_1) + v.(\tau_2 - \tau_1) \}$$

今 τ 2 - τ 1 = 0 に対しては

$$\xi_2 - \xi_1 = 1/\beta.(x_2 - x_1) = \sqrt{1 - (v/c)^2} . (x_2 - x_1)$$

即ち運動物体は運動方向に縮む。ここで物体とはその中の各点の時間が一致して流れるものである。

異なる慣性系間の保存量

静止系 K に対して x 方向に等速直線運動をする移動系の間で次の量は保存される。

$$(c.t)^2 - (x^2 + y^2 + z^2) = (c.\tau)^2 - (\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)$$

静止座標系

運動座標系

時間と空間座標の微小変化

$$t \rightarrow t + \Delta t, \quad x \rightarrow x + \Delta x, \quad y \rightarrow y + \Delta y, \quad z \rightarrow z + \Delta z, \text{等}$$

に対して以下の微分形式が成り立つ。

$$(c.\Delta t)^2 - \{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\} = (c.\Delta \tau)^2 - \{(\Delta \xi)^2 + (\Delta \eta)^2 + (\Delta \zeta)^2\}$$

3.2 運動体の電気力学

前述の Maxwell の方程式は静止系 K (t, x, y, z)における表現である。ここでは電界 vector E は(x, y, z)方向の成分(Ex, Ey, Ez)を持つ。他の vector D, B, H についても同様である。

真空中における相対性原理

今移動系 k (τ, ξ, η, ζ)における電界 vector を (E ξ', E η', E ζ')等と表記し微分演算子を

$$\nabla' = i\partial/\partial\xi + j\partial/\partial\eta + k\partial/\partial\zeta$$

とすると移動系 k においても静止系 K と全く同形式の Maxwell 基礎方程式が成り立つ筈である。

$$\nabla' \cdot \mathbf{H}' = \mathbf{J}' + \partial \mathbf{D}' / \partial \tau \quad (3.2-1)$$

$$\nabla' \times \mathbf{E}' = -\partial \mathbf{B}' / \partial \tau \quad (3.2-2)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{B}' = 0 \quad (3.2-3)$$

$$\nabla' \cdot \mathbf{D}' = \rho' \quad (3.2-4)$$

真空中における電磁界の座標変換

真空中においては

$$\mathbf{J} = 0, \quad \rho = 0 \quad (3.2-5)$$

相対性原理の要請から座標変換を行うと電界、磁界について次の変換則が成り立つ事が示される。

$$E'_x = E_x \quad (3.2-6)$$

$$E'_y = \beta(E_y - vB_z) \quad (3.2-7)$$

$$E'_z = \beta(E_z + vB_y) \quad (3.2-8)$$

$$B'_x = B_x \quad (3.2-9)$$

$$B'_y = \beta(B_y + v/c^2 E_z) \quad (3.2-10)$$

$$B'_z = \beta(B_z - v/c^2 E_y) \quad (3.2-11)$$

上の式の言う所は

(1) 運動系の運動方向の電磁界は変化無し。

(2) 運動と直角方向(transversal direction)には

$$\mathbf{E}'_t = \beta \cdot (\mathbf{E}_t + \mathbf{v} \times \mathbf{B}_t)$$

即ち係数 $\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ が掛けられている点を除けば磁界と速度ベクトルの外積によって Lorentz 力を生じる電界が加えられる事が分かる。即ち Lorentz 力とは相対論的なものであるとも言える。

更には磁界についても

$$\mathbf{B}'_t = \beta \cdot (\mathbf{B}_t - \mathbf{v} \times \mathbf{E}_t / c^2)$$

以上より

(3) 運動方向には電界と磁界は独立であるが、運動方向と直角方向には電界と磁界はベクトル形式の Lorentz 変換により相互に変換する。一般には両者を合わせて電磁界として扱う必要がある。

3.3 電磁界の中での電子の運動

今静止系 K に対して x 方向に速度 $\mathbf{v}$ で移動している電子に対して移動系 k' の中で観測すると瞬間的には次の運動方程式が成立すると考えられる。

$$m \cdot [(d/d\tau)^2] \xi = e \cdot E'_x = e \cdot E_x$$

$$m \cdot [(d/d\tau)^2] \eta = e \cdot E'_y = e \cdot \beta \cdot (E_y - vB_z)$$

$$m \cdot [(d/d\tau)^2] \zeta = e \cdot E'_z = e \cdot \beta \cdot (E_z + vB_y)$$

但し m は電子の質量、e は電荷である。

これを静止系で観測するとどうなるであろうか。

電子の固有時

電子の運動は静止系に対して一般に等速直線運動はせず、その軌跡は曲線を描く。

運動する電子を原点とする移動座標系の前述の保存量の式

$$(c \cdot \Delta t)^2 - \{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2\}$$

$$= (c \cdot \Delta \tau)^2 - \{(\Delta \xi)^2 + (\Delta \eta)^2 + (\Delta \zeta)^2\}$$

において

$$(\Delta \xi)^2 + (\Delta \eta)^2 + (\Delta \zeta)^2 = 0$$

とくと

$$d\tau/dt = \sqrt{1 - (v/c)^2}$$

$$= \sqrt{1 - (d\mathbf{r}/dt/c)^2}$$

$$= 1/\beta$$

但し

$$\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$$

$$\mathbf{r} = (x, y, z)$$

である。

ここで τ は移動系即ち電子の固有時である。

静止系から見た電子の運動方程式

まず電子の進行方向については前述のように時間も空間も同じ率で縮むから

$$d\xi/d\tau = dx/dt$$

故に

$$[(d/d\tau)^2] \xi = [d/dt][dx/dt]$$

$$= [d/dt][dx/dt] \cdot [dt/d\tau]$$

$$= \beta \cdot [(d/dt)^2] x$$

進行と直角方向には

$$[(d/d\tau)^2] \eta = \beta^2 \cdot [(d/dt)^2] y$$

$$[(d/d\tau)^2] \zeta = \beta^2 \cdot [(d/dt)^2] z$$

結局静止系で観測する電子の従う方程式は

$$m \cdot \beta \cdot [(d/dt)^2] x = e \cdot E_x$$

$$m \cdot \beta \cdot [(d/dt)^2] y = e \cdot (E_y - vB_z)$$

$$m \cdot \beta \cdot [(d/dt)^2] z = e \cdot (E_z + vB_y)$$

3.4. 相対論的運動量と質量

上の式を吟味すると次の事が言える。

- (1) 電磁界が電子に及ぼす力は通常の静止系の電磁界と Lorentz 電界である。
- (2) 速度 v で運動する電子の質量は $\beta = 1/\sqrt{1 - (v/c)^2}$ 倍になる。これを相対論的質量という。

相対論的質量は実験的にも証明されており、物体の速度が光速に到達できない事を明確に示している。

相対論的エネルギー

以上より x は特別な方向ではない事が示されたので $\mathbf{x}$ を位置ベクトル $\mathbf{r}$ に置き換える。

$$\begin{aligned} d\mathbf{r}/dt &= (d\mathbf{r}/d\tau) \cdot (d\tau/dt) \\ &= (d\mathbf{r}/d\tau) \cdot \sqrt{1 - ((d\mathbf{r}/dt)/c)^2} \\ &= (d\mathbf{r}/d\tau) / \sqrt{1 + ((d\mathbf{r}/d\tau)/c)^2} \end{aligned}$$

他方

$$\begin{aligned} d\tau/dt &= \sqrt{1 - ((d\mathbf{r}/dt)/c)^2} \\ &= 1 / \sqrt{1 + ((d\mathbf{r}/d\tau)/c)^2} \end{aligned}$$

そこで

$$\begin{aligned} &m \cdot c^2 [d/dt] (dt/d\tau) \\ &= m \cdot c^2 \cdot [d/dt] \sqrt{1 + ((d\mathbf{r}/d\tau)/c)^2} \\ &= (d\mathbf{r}/d\tau) / \sqrt{1 + ((d\mathbf{r}/d\tau)/c)^2} \cdot m \cdot [d/dt] (d\mathbf{r}/d\tau) \\ &= d\mathbf{r}/dt \cdot \mathbf{F} \\ &= \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} \end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= m \cdot [d/dt] (d\mathbf{r}/d\tau) \\ &= \beta m \cdot [(d/dt)^2] \mathbf{r} \end{aligned}$$

は力である。

更に

$$\mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = dE/dt$$

は Energy の変化率であり、 E は運動体のエネルギーである。

これより

$$\begin{aligned} E &= m \cdot c^2 \cdot (dt/d\tau) \\ &= m \cdot c^2 / \sqrt{1 - (v/c)^2} \\ &= m \cdot c^2 + 1/2 m \cdot v^2 \quad (v/c \ll 1) \end{aligned}$$

第一項は静止エネルギー、第二項は運動エネルギーである。

静止エネルギーは質量とエネルギーの等価性を示す。

参考文献

- [1] 内山龍雄 「アインシュタイン相対性理論」 岩波文庫